中学校数学３年

＜多項式の展開（計算）＞

$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd$

$(a+b)=M$ とおけば分配法則から $M(c+d)=Mc+Md$ となり

$M=a+b$ をもとにもどして

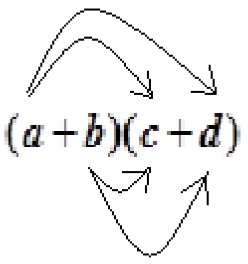
分配法則から $(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd$ となる

$(c+d)$ を一つの文字とみて

$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$

としても良い

さらに、この計算は、次のようにしてバラバラに展開することが多い



途中の計算式なしで

⇒ $ac+ad+bc+b$ とできる

【展開公式】

$k(a+b)=ka+kb$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

※ x の係数と定数項に注目すると、左辺の a と b をそれぞれ足したものの掛けたものになっている

※ $102\times 98=(100+2)(100-2)=100^2-2^2=10000-4=9996$

　と暗算に利用することもできるが、こんな偶然は殆どない

＜素数＞

１と自分自身でしか割り切れない数

例えば

$2,3,5,7,11,13,17\cdots$ は素数である

＜素因数分解＞

ある数を素数の積で表すこと

例えば

$18=2\times 3^2$

求め方は、繰り返し素数で割っていけばよい

2)18

3)9　⇒ $2\times 3\times 3$ と分かる

　3

＜因数分解＞

式の展開の逆の操作である

$ac+bc+ad+b=(a+b)c+(a+b)d=(a+b)(c+d)$

このように、多項式の積の形にすることを因数分解すると呼ぶ

【因数分解の公式】重要

$ka+kb=k(a+b)$ ⇒共通因数をくくる

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

$x^2+(a+b)+ab=(x+a)(x+b)$

上記は確実に使えるようにすること

通常は組み合わせて使われる。

例えば

$$2xyz^2+4xyz-6xy=2xy(z^2+2z-3)=2xy(z-1)(z+3)$$

※ $52^2-48^2=(52+48)(52-48)=100\times 4=400$ と暗算ができるがこんな偶然は殆どない

＜平方根＞

二乗して a になる数正の数を $\sqrt{a}$ とかく、負の数は $-\sqrt{a}$ とかく（ともにルートの中は正：$a>0$）

例えば、$\sqrt{4}=2,\ \sqrt{9}=3, \sqrt{16}=4, \cdots$ である

$\sqrt{2},\ \sqrt{3}, \sqrt{5}\cdots$ は整数にはならない（無理数；循環しない無限小数）

勿論２乗すれば、$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$、$\left(-\sqrt{a}\right)^2=a$ と計算できる

例えば、二乗して２になる数は $\sqrt{2}$ と　$-\sqrt{2}$ の２個ある

$\left(\sqrt{2}\right)^2=2$、$\left(-\sqrt{2}\right)^2=2$ であるし、$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ である

＜平方根の計算＞

① $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

　特に $a=b$ のとき $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$

② $\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

③ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$　（分母の有理化）

④ $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

⑤ $a\sqrt{b}+c\sqrt{b}=(a+c)\sqrt{b}$

　注意：$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$　（ゼッタイ駄目）

　例えば①は

$$\sqrt{6}\times\sqrt{3}=\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$$

　例えば②は

$$\sqrt{6}\div\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{2}$$

　例えば③は

$$\sqrt{\frac{2}{3}}==\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{7}}{10}$$

　（分母と同じ数を分母と分子にかける）

　例えば④は

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

　同様に $\sqrt{50}=\sqrt{25\times 2}=\sqrt{5^2\times 2}=5\sqrt{2}$ とできる

　$\sqrt{0.07}=\sqrt{\dfrac{7}{100}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{10^2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{10}$ とする

　例えば⑤は

$$\sqrt{50}+\sqrt{18}=5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$$

＜平方根を外す＞

$$\sqrt{1764}=\sqrt{3^2\times 2^2\times 7^2}=3\times 2\times 7=42$$

（$\sqrt{\ }$ の中を素因数分解して求める）

さらに、計算結果では外れる場合がある

$$\sqrt{2}\times\sqrt{18}=\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\right)^2\times 3=2\times 3=6$$

＜平方根の約の値＞

スマホでも計算できるが、かつての覚え方は

$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$（一夜一夜(ひとよひとよ)に人見(ひとみ)ごろ）

$\sqrt{3} = 1.7320508\cdots$（人並(ひとな)みに奢(おご)れや）

$\sqrt{5} = 2.23690679\cdots$（富士山麓(ふじさんろく)オーム鳴(な)く）

＜平方根の大小関係＞

$a > 0, b > 0$ のとき $a > b \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$

例えば

$\sqrt{6}$ は、$\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9}$ なので $2 < \sqrt{6} < 3$ とわかる

また、$\sqrt{3}$ と２の大小比較は２乗して

$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$、$2^2 = 4$ となり $3 < 4$ ので $\sqrt{3} < 2$ とわかる

（$2 = \sqrt{4}$ と考えて $\sqrt{3} < \sqrt{4}$ から $\sqrt{3} < 2$ も使える）

＜実数＞

数直線上にある数は実数（無理数と有理数を合わせた数）

$$
\text{実数}\begin{cases}
\text{有理数}\begin{cases}
\text{整数}\begin{cases}\text{正の整数}\\ 0\\ \text{負の整数}\end{cases}\\
\text{分数}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{循環小数}\end{cases}
\end{cases}\\
\text{無理数}\begin{cases}\text{循環しない無限曜数}\\ \\ \pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \cdots etc\end{cases}
\end{cases}
$$

・循環小数は分数に直すことができる

例えば $x = 5.\dot{3}\dot{2} = 5.323232\cdots$ とおき

$$
\begin{array}{rl}
 & 100x = 532.3232\cdots \\
-) & \underline{\quad x = 5.323232\cdots} \\
 & 99x = 527
\end{array}
$$

よって、$x = \dfrac{527}{99}$

＜２次方程式＞重要

一般に $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ の形

【解法①】（因数分解の利用）

$x^2 + (a+b) + ab = 0 \Rightarrow (x+a)(x+b) = 0 \Rightarrow x + a = 0, x + b = 0$

したがって、$x = -a, \quad x = -b$

例えば $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) = 0$ から $x = 1,\ x = -3$

【解法②】（平方完成の利用）

$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$ から $x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$ である

$x^2 + 2ax + c = 0 \Rightarrow (x+a)^2 - a^2 + c = 0$

ここで $(x+a)^2 = a^2 - c$ と変形して $x + a = \pm\sqrt{a^2 - c}$

よって、$x = -a \pm \sqrt{a^2 - c}$

例えば $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 - 2^2 - 3 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 9$

$x + 2 = \pm\sqrt{9}$、したがって $x = -2 \pm 3$ から $x = 1,\ x = -3$

【解法③】（解の公式）

２次方程式：$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

例えば $x^2 + 2x - 3 = 0$ ⇒公式に $a = 1, b = 2, c = -3$ を代入して

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

から $x = 1,\ x = -3$

＜２次関数＞

２次関数 $y = ax^2\ (a \neq 0)$ のグラフ

① $a > 0$ のとき下に凸の放物線

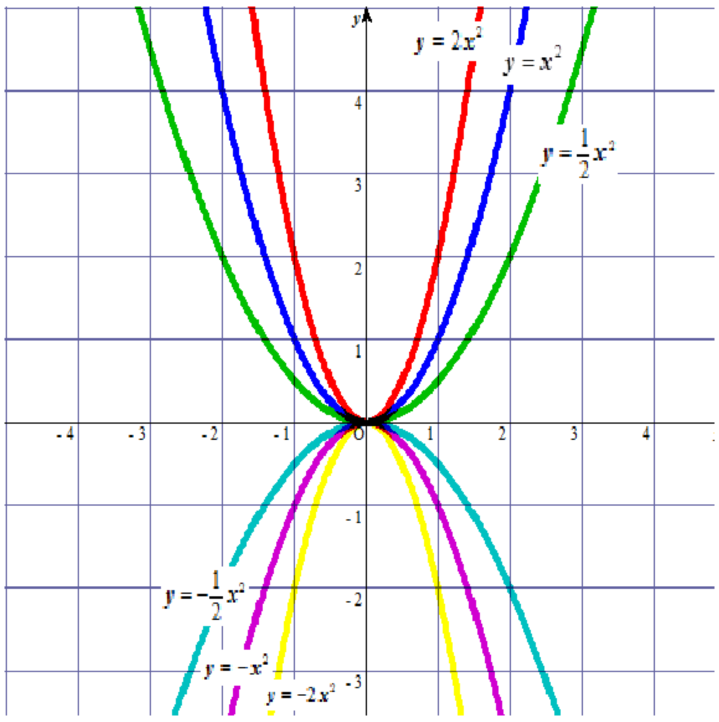
$a < 0$ のとき上に凸の放物線

② 原点を通り y 軸に関して対称である

③ 原点で増加と減少が入れ替わる

④と $y = -ax^2$ は x 軸に関して対称である

$y = x^2, y = 2x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = -x^2, y = -2x^2, y = -\frac{1}{2}x^2$ の６つのグラフは下図のようになる



a の値によって変化の割合が変わる。さらに x の値によっても変化の割合が違い、原点から離れると急激に変わることが分かる

変化の割合 $= \dfrac{y\text{の増分}}{x\text{の増分}}$ は一定ではない

＜相似な図形＞

形を変えずに一定の割合（相似比）で、拡大したり縮小させた図形

・対応する角度は同じ

・辺の比は一定（相似比）

例えば相似比が１：２ならば対応する長さが全て $\frac{1}{2}$ の長さ

相似な図形の面積比，体積比

相似比が $m:n$ である図形の面積比は、$m^2:n^2$

相似比が $m:n$ である立体の体積比は、$m^3:n^3$

（表面積の比は、$m^2:n^2$）

＜三角形の相似条件＞

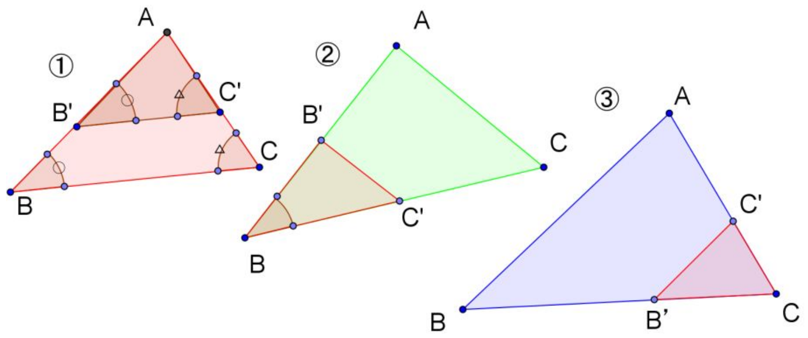
記号：$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$ とかく

① ２角が等しい（$\angle ABC = \angle AB'C'$、$\angle ACB = \angle A'C'B$）

② ２辺の比と挟む角が等しい

（$\angle ABC = \angle AB'C'$、$BA : BC = BB' : BC'$）

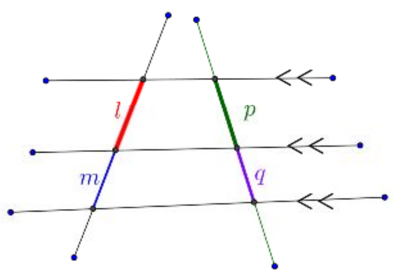
③ ３辺の比が等しい（$AB = C'B', AC = C'C, BC : B'C$）



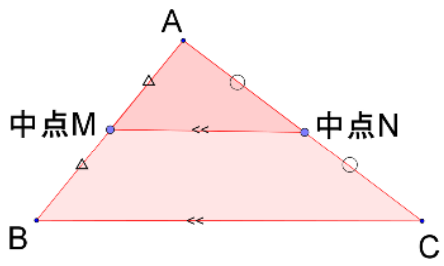
また、逆に③の図で $AB \parallel C'B'$ が分かると辺の比
$AB = C'B', AC = C'C, BC : B'C$ が使える

＜平行線の性質＞

下図で、$l : m = p : q$ が成立



＜中点連結定理(通称名）＞



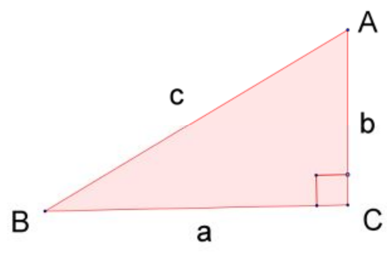
三角形の２辺の中点を結ぶと、相似の関係から、(相似比２：1)

$MN \parallel BC$ かつ $MN = \frac{1}{2}BC$ が成立する

＜三平方の定理（ピタゴラスの定理）＞

直角三角形の斜辺の長さの二乗は、他の二辺の長さの二乗の和に等しい（昔は、直角三角形の斜辺に立つ正方形は、他の二辺に立つ正方形の和に等しいと教えていた）

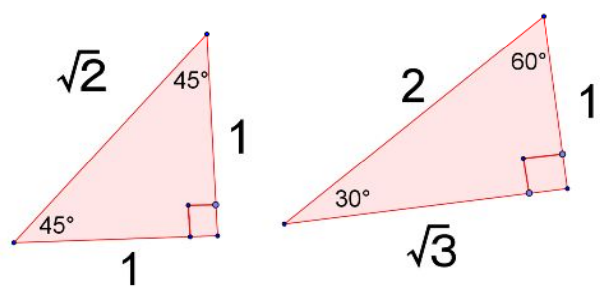
$AB = c, BC = a, CA = b$ のとき、$c^2 = a^2 + b^2$ が成立



逆に $c^2 = a^2 + b^2$ が成り立てば ΔABC は直角三角形である

＜三平方の定理の応用＞

① 三角定規の比の値　重要



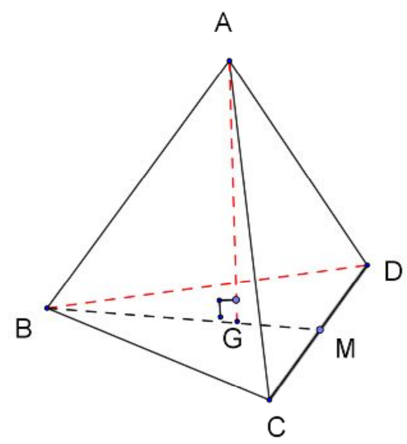
② ３辺が 3,4,5 の三角形は直角三角形である（$\because 5^2 = 3^2 + 4^2$）

③ 一辺が a の正三角形の高さは $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ である（三角定規の比）

④ ２点 $(a,b)(c,d)$ 間の距離 $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$

⑤ ３辺の長さが a,b,c の直方体の対角線 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

⑥ 一辺が a の正四面体の高さを求める



G は重心であるから BG：GM＝2：1 よって $BG = \frac{2}{3}BM$

$BM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ なので、$BG = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

高さ AG 底面に垂直だから三平方の定理から

$BG^2 + AG^2 = AB^2$ より $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 + AG^2 = a^2$

$AG^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2$　ここで $a > 0$

$AG = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$

＜標本調査＞

全数調査をすることができない場合、母集団からサンプルを抽出して、母集団の様子を推測する調査を標本調査と呼ぶ

注意１：標本は無作為に抽出すること（乱数表、乱数サイコロ etc）

注意２：一般に、標本数は 100 を下回わると信頼性がない

① 母集団の平均値を標本平均から推定
例えば、缶詰の不良品標本調査を行い
1000 個のうち標本を 100 個取り調べたところ３個の不良品があったとすると、$1000 \times \frac{3}{100} = 30$ 個の不良品があると推定できる

② 母集団の数量は標本の割合から推定
例えば、ある湖のブラックバスがおよそ何匹生息しているかを調べるために、100 匹生け捕りして印を付けて湖に返した。後日、100 匹を補角したところ、20 匹に印が付いていたとすると、
ブラックバスの総数：100＝100:20 と考えてやると
$100 \times \frac{100}{20} = 500$ 匹と推定できる