かつて高校数学Ｃで扱っていた内容

＜行列＞

ベクトルの拡張で、各成分を縦横に並べたものである。

x_{ij} ：i 行 j 列目にある成分

＜行列の演算＞

和、差、実数倍に関しては、各 i 行 j 列目にある成分で、和、差、実数倍をすれば良い。したがって、i 行 j 列の型が同じ (i×j 型同士) でないと演算は不可である。掛け算については、i×j 型と j×k 型が演算可能で、計算結果は i×k 型となる。

特に、次の形の場合が多い。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bd} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

・結合法則は和も積も成立する

$\boldsymbol{A(BC) = (AB)C}$

$\boldsymbol{A + (B + C) = (A + B) + C}$

・分配法則が成立

$\boldsymbol{A(B + C) = AB + AC}$

$\boldsymbol{(B + C)A = BA + CA}$

・和の交換法則 $\boldsymbol{A + B = B + A}$ は成立

$\boldsymbol{n}$ 個の行列 A を掛けたものは、 $AAA\cdots AA = A^n$ と書く。

また、一般には、 $\boldsymbol{AB \neq BA}$ で、交換法則は不成立である。

実数の掛け算での１と同様に、単位行列 E が存在し、左から掛けても右から掛けても変わらない。 $EA = AE = A$ である。

２×２型のときの単位行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

また、全ての成分が 0 の行列を零行列と呼び、零行列０については、実数の 0 と同様に $AO = OA = O$

ただし、 $A \neq O, B \neq O$ であっても $AB = O$ となることがある。

（つまり、実数とは違い、零因子の存在に注意する。）

２×２型のときの零行列は、 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

割り算については、実数で逆数を掛けることにより計算するのと同様に、逆行列 A^{-1} を掛けることにより演算を行う。

逆行列とは、掛けたときに単位行列 E になる行列であり、これは実数で、掛けて１になる数を逆数と呼ぶのと同じである。

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$

特に、２×２型のときの逆行列は、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ただし、 $\Delta = ad - cb \neq 0$

（ $\vec{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \quad \vec{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})$ の作る平行四辺形の符号付面積）

もし、 $\Delta = ad - cb = 0$ ならば逆行列は存在しない。

（実数 0 に逆数が存在しないのと同様である。）

$\boldsymbol{n}$ 個の行列 A を掛けたものは、 $AAA\cdots AA = A^n$ と書く。

＜ケーリー・ハミルトンの公式＞

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、

$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ が成立する。

これは、 A^n の次数を下げて計算する場合に良く使われる。

＜逆行列の利用＞

A^{-1} が存在するならば、一次方程式と同様に、

$AX = B \to A^{-1}AX = A^{-1}B \to EX = A^{-1}B \to X = A^{-1}B$

または

$XA = B \to XAA^{-1} = BA^{-1} \to XE = BA^{-1} \to X = BA^{-1}$

と変形ができる。

上記のことを利用すれば、連立２元１次方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \text{p}$$

を行列を用いて解くことができる。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおけば

連立２元１次方程式は、 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 、つまり

$AX = B \to A^{-1}AX = A^{-1}B \to EX = A^{-1}B \to X = A^{-1}B$

だから、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ を計算すれば良い。

＜行列の基本変形＞

①二つの行を入れ替える

②ある行に 0 でない実数を掛ける

③ある行に他の行の実数倍を加える

注）連立２元１次方程式は行列の基本変形で消去法を用いても求めることができる。

$AX = B \to A, B$ を基本変形して $EX = Q$ の形にすれば

解は $X = Q$

＜１次変換＞

点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')$ に移す

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

＜原点を中心として回転＞

点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を θ 回転して点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}')$ に移す

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

＜原点を中心として拡大・縮小＞

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \quad \text{倍率：} \boldsymbol{k}$$

＜１次変換の性質＞

① 直線を直線に移す

② 分点は同じ比の分点に移す

③ 図形の内部は内部に移す

④ 面積について $\Delta = \boldsymbol{ad} - \boldsymbol{cb}$ 倍になる

＜固有値の求め方＞

行列 A において $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$ を満たす実数 $\boldsymbol{\lambda}$ を固有値、 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$ を固有ベクトルという

$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$ から、 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と変形して、単位行列を

$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} - \boldsymbol{\lambda E}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda E})\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで行列 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda E})$ が逆行列をもつと $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ （自明な解）になってしまうので、行列 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda E})$ が逆行列を持たない条件を用いる

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}-\lambda & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}-\lambda \end{pmatrix}$

と変形して $\Delta=(\boldsymbol{a}-\lambda)(\boldsymbol{d}-\lambda)-\boldsymbol{bc}=0$ である。

この $\boldsymbol{\lambda}$ についての 2 次方程式（固有方程式）を解いて、固有値 λ_1 と λ_2 が求まる。

＜固有ベクトルの求め方＞

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}-\lambda_1 & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ から、不定な解 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}=\boldsymbol{t}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{q}_1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}-\lambda_2 & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d}-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ から、不定な解 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}=\boldsymbol{t}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix}$

が求める固有ベクトルである

ここで $\boldsymbol{t}$ は任意の実数なので実際には平行なベクトルが無数に存在していることが分かる。

＜行列の対角化の方法＞

各固有ベクトルから作った行列 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix}$ のとき $\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$

を用いて、$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ となる

この両辺の左から $\boldsymbol{P}$ 、右から逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ をかけると

$\boldsymbol{PBP}^{-1}=\boldsymbol{PP}^{-1}\boldsymbol{APP}^{-1}=\boldsymbol{A}$

$\therefore \boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$ とかける

これを行列 A の対角化と呼ぶ

＜対角化された行列の n 乗＞

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$ のとき

$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{PBP}^{-1})^2=(\boldsymbol{PBP}^{-1})(\boldsymbol{PBP}^{-1})=\boldsymbol{PBP}^{-1}\boldsymbol{PBP}^{-1}=\boldsymbol{PBEBP}^{-1}=\boldsymbol{PB}^2\boldsymbol{P}^{-1}$

$\boldsymbol{A}^3=(\boldsymbol{PBP}^{-1})^3=(\boldsymbol{PBP}^{-1})(\boldsymbol{PBP}^{-1})(\boldsymbol{PBP}^{-1})$

$=\boldsymbol{PBP}^{-1}\boldsymbol{PBP}^{-1}\boldsymbol{PBP}^{-1}=\boldsymbol{PBEBEBP}^{-1}=\boldsymbol{PB}^3\boldsymbol{P}^{-1}$

これを繰り返せば $\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{PBP}^{-1})^n=\boldsymbol{PB}^n\boldsymbol{P}^{-1}$

（証明は数学的帰納法により明らか）

また固有値を用いて、$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ であれば

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^3=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 \end{pmatrix}$$

これを繰り返せば $\boldsymbol{B}^n==\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ となる

（証明は数学的帰納法により明らか）

したがって $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$ 　で計算できることになる

使用例：連立漸化式の解法

$\begin{matrix} \boldsymbol{a}_{n+1}=\boldsymbol{aa}_n+\boldsymbol{bb}_n \\ \boldsymbol{b}_{n+1}=\boldsymbol{ca}_n+\boldsymbol{db}_n \end{matrix}$ は $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{n+1} \\ \boldsymbol{b}_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$ とかけるので

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{n+1} \\ \boldsymbol{b}_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{n-1} \\ \boldsymbol{b}_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{n-2} \\ \boldsymbol{b}_{n-2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}^4\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{n-3} \\ \boldsymbol{b}_{n-3} \end{pmatrix}=\cdots$$

$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{b}_1 \end{pmatrix}$$

なので

$\therefore \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{n+1} \\ \boldsymbol{b}_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{b}_1 \end{pmatrix}$ となり

$\boldsymbol{a}_{n+1}$ と $\boldsymbol{b}_{n+1}$ が n の式で表される

このとき固有値と固有ベクトルから対角化された行列の n 乗を具体的に求めておき

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$ を用いて計算すれば良い

$\boldsymbol{a}_{n+1}$ と $\boldsymbol{b}_{n+1}$ の式を $\boldsymbol{a}_n$ と $\boldsymbol{b}_n$ に変えれば、一般項 $\boldsymbol{a}_n$ と $\boldsymbol{b}_n$ を求めることができる

＜単位行列＞

一般に、右からかけても左からかけても変わらない

$\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$

例示：

基本ベクトル　$\vec{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ \vec{e}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ \vec{e}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として

$\boldsymbol{E}_3=(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき

$$\boldsymbol{AE}_3=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{c}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{c}_3 \end{pmatrix}$ である

n 次の単位行列は、対角線が 1、その他は 0 の形

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

かつて高校数学で扱っていた空間図形等

＜点と平面の距離＞

点と直線の距離と比べてみよう

点(x_1, y_1) と直線$ax+by+c=0$の距離d

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ であったが、

> 点(x_1, y_1, z_1) と平面$ax+by+cz+d=0$の距離Dは
>
> $$D=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ で求められる。

例　点$(2, 4, 6)$と平面：$x+y+z-6=0$の距離Dは

$$D=\frac{|2+4+6-6|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

＜直線と図形の交点を求め方＞

　単純に連立方程式を解くと計算が複雑になるので

工夫して見よう。

直線：$x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$ ・・・①

平面：$x+y+z=12$ ・・・・・・②

球面：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$ ・・・③

上記のとき

①の直線を媒介変数表示に直すと

$x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}=t$とおけば

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \quad \cdots ★ \\ z=3+3t \end{cases}$$

となる。つまり、点$(1+t, 2+2t, 3+3t)$

が図形上にあるとしてやれば、実際にtの値がいくつのときかを

求めることができる。

<u>平面との交点</u>

・点$(1+t, 2+2t, 3+3t)$が平面上にあるので②に代入して

　$(1+t)+(2+2t)+(3+3t)=12$

$6+6t=12 \quad \therefore t=1$

点$(1+t, 2+2t, 3+3t)$に代入して、求める交点は$(2, 4, 6)$となる。

<u>球面との交点</u>

・点$(1+t, 2+2t, 3+3t)$が球面上にあるので③に代入して

　$(1+t-1)^2+(2+2t-2)^2+(3+3t-3)^2=14$

　$t^2+4t^2+9t^2=14 \quad \therefore t^2=1 \quad \therefore t=\pm 1$

点$(1+t, 2+2t, 3+3t)$に、それぞれ代入して、

求める交点は$(2, 4, 6)$と$(0, 0, 0)$となる。

＜２平面の交線の求め方＞

平面：$x+2y-5z=3$ ・・・・・・①

平面：$3x-y+z=-5$ ・・・・・・②

x, y, zで２文字ごとの関係式を出せば良いので、

①②より１文字消去する。例えば②×２＋①を作り、yを消去して、

xとzの関係は、$7x-3z=-7$から$z=\frac{7}{3}(x+1)$

同様に、①×３ー②から$z=\frac{7}{16}(y-2)$

従って、求める交線は、直線$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{16}=\frac{z}{7}$である。

＜平面と直線のなす角の求め方＞

直線：$\frac{x+1}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{-4}$ ・・・①

平面：$5x-4y-3z=10$ ・・・・・②

①　と②のなす角を求めよう。

直線の方向ベクトル$\vec{d}=(5, 3, -4)$で、

平面の法線ベクトル$\vec{n}=(5, -4, -3)$である。

まず$\vec{d}$と$\vec{n}$のなす角θを求める。

$$\cos\theta=\frac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{|\vec{d}||\vec{n}|}=\frac{5\times 5+3\times(-4)+(-4)\times(-3)}{\sqrt{5^2+3^2+(-4)^2}\sqrt{5^2+(-4)^2+(-3)^2}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta=60^\circ$　法線ベクトルは、平面に対して90°の角だから、求める角は$90^\circ-60^\circ=30^\circ$である。

＜３点を通る平面の求め方＞

３点$(2, -1, 1)$ $(2, 1, 3)$ $(1, 1, -1)$を通る平面を求めるには、

求める平面を$ax+by+cz+d=0$とおき、上の各点を代入することにより、３関係式ができる。

$$\begin{cases} 2a-b+c+d=0 \cdots ① \\ 2a+b+3c+d=0 \cdots ② \\ a+b-c+d=0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①②③からa, b, cをdを用いて表すと、（dを定数扱いして解く）

$a=-\frac{2}{3}d \quad b=-\frac{1}{6}d \quad c=\frac{1}{6}d$

よって平面は、$-\frac{2}{3}dx-\frac{1}{6}dy+\frac{1}{6}dz+d=0$

両辺を$-\frac{6}{d}$倍して整理して、（$d\neq 0$）

求める平面は、$4x+y-z-6=0$である。

大学では線形代数で

一般化され(n,m)行列やｎ次の正方行列を扱う。また、数ベクトル空間内での写像（$n=m$のとき１次変換）として行列を用いる。

＜R^nの部分空間V＞

和とスカラー倍で閉じている空間を、R^nの部分空間Vと呼ぶ

＜空間の次元＞

ベクトル空間$\dim V = r$とはr個の基底（基本ベクトル）

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\ \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\ \vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\cdots\ \vec{e}_r=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$ で張られる空間

この基底は大きさ１で互いに直交しているので正規直交基底と呼ばれる。

一般にｒ個の１次独立なベクトルで張られる空間（生成される空間）

すなわちR^nの部分空間Vで$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_r$が１次独立で、V内の任意のベクトルが１次結合$c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3+\cdots+c_ra_r$で表現されるなら$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_r$が$V$の基底

この部分空間を記号$\langle a_1,a_2,a_3,\cdots,a_r\rangle$を用いて表すこともある

＜行列の表記＞

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$$ は、$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$として

$A=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$と表記することもある。

＜行列式 determinant の表記＞

３次ならば

$$|A|=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_1 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\det A=\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\det\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right)$$

（ｎ次元のときも同様の表記ができる）

＜行列式の性質＞

k,α,β ：スカラー定数

① $\det(k\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots)=k\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots)$

② $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots)=-\det(\vec{b},\vec{a},\vec{c},\cdots)$

③ $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots)=\det(\vec{a}+k\vec{b},\vec{b},\vec{c},\cdots)$

④ $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots)=\det(\vec{a}+\alpha\vec{b}+\beta\vec{c},\vec{b},\vec{c},\cdots)$

⑤ $\det(\vec{a},\vec{a},\vec{c},\cdots)=0$

⑥ $\det(\vec{a}+\vec{p},\vec{b},\vec{c},\cdots)=\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots)+\det(\vec{p},\vec{b},\vec{c},\cdots)$

⑦ 行列$C=BA$ならば$\det C=(\det B)(\det A)$

＜転置行列＞

行列の行と列を入れ替えた行列

$$A=\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right)$$ の転置行列は${}^tA$とかく

この場合は

$${}^tA=\begin{pmatrix}(a_1 & a_2 & a_3)\\ (b_1 & b_2 & b_3)\\ (c_1 & c_2 & c_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$$

（ｎ次元のときも同様の表記ができる）

Aの(i,j)成分は${}^tA$の(j,i)成分となる。

行列Aが(m,n)行列ならば${}^tA$は(n,m)行列となる

さらに

$A={}^tA$のとき対称行列と呼ぶ（成分が実数のときは実対称行列と呼ぶ）

＜転置の定理＞

$|A|=|{}^tA|$が成立する（$\det A=\det{}^tA$とも表記）

＜余因子行列＞

$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$の余因子行列$\widetilde{A}$は小行列式$\begin{pmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13}\\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23}\\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33}\end{pmatrix}$の転置行列であり、$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}\Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31}\\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32}\\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33}\end{pmatrix}$各成分は余因子と呼ばれ、次のように計算される

$$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{33}$$

$$\Delta_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})$$

$$\Delta_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}=a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$$

$$\Delta_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=-(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$$

$$\Delta_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}$$

$$\Delta_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}=-(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})$$

$$\Delta_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$$

$$\Delta_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=-(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})$$

$$\Delta_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$\boldsymbol{A}$ が n 次の正方行列のとき $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{i\,j})$ （n 次行列）も同様である

$\Delta_{i\,j}$ とは $\boldsymbol{i}$ 行と $\boldsymbol{j}$ 列を除いた(n－1)次行列を $\boldsymbol{A}_{i\,j}$ と表すと、その行列

式を計算して、各成分を定める。定め方は $\Delta_{i\,j}=(-1)^{i+j}\left|\boldsymbol{A}_{i\,j}\right|$ であり、

各値（余因子）を成分とする n 次行列の転置行列を余因子行列という

＜逆行列の存在＞

$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})$ 行列 $\boldsymbol{A}$ で $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}\neq 0$ のとき逆行列が存在する $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}=0$ ならば存在しない

＜逆行列を求める方法Ⅰ＞

$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ ならば逆行列が存在し（正則行列）その逆行列は $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\tilde{\boldsymbol{A}}$

＜逆行列を求める方法Ⅱ＞

行列の基本変形の利用

①二つの行を入れ替える

②ある行に 0 でない実数を掛ける

③　ある行に他の行の実数倍を加える

①　~③を繰り返して $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$ 行列の行列 A を

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \cdots \\ & \vdots & & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$ の形に変形できる

つまり

$\begin{pmatrix} E_r & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ ここで、ｒ次の単位行列 E_r である。

ｒは一意に定まり、行列 A の階数と呼び $\mathrm{rank}\,A$ と書く

例： $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ のとき

掃出し法を用いると

$$\left.\begin{matrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \to \left.\begin{matrix} 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \to \left.\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \to \left.\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -9 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{matrix}$$

$$\to \left.\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1 & 1 \\ -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{matrix} \to \left.\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{matrix}$$

よって、$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

＜3 元連立 1 次方程式（3 階の線形方程式）＞

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$ とおけば

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{r} \end{pmatrix}$$ を計算すれば解ける。

（余因子行列または掃出し法で、逆行列を作る作業が必要）

または、　Cramer（クラメール）の公式から

$$\boldsymbol{x}=\frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{q} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{r} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix}} \quad \boldsymbol{y}=\frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{p} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{r} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix}} \quad \boldsymbol{z}=\frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix}}$$ となる

2 次の場合の Cramer 公式使用例

連立方程式 $\begin{cases} x+y=20 \\ 2x+4y=56 \end{cases}$ は行列で表すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 \\ 56 \end{pmatrix}$$

Cramer（クラメール）の公式から

$$\boldsymbol{x}=\frac{\begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 56 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{20\times 4-1\times 56}{1\times 4-1\times 2}=\frac{24}{2}=12$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 2 & 56 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{1\times 56-20\times 2}{1\times 4-1\times 2}=\frac{16}{2}=8$$

＜行列式の展開＞

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix}=\boldsymbol{a}_{11}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix}-\boldsymbol{a}_{21}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{vmatrix}+\boldsymbol{a}_{31}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{a}_{11}(\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{a}_{33}-\boldsymbol{a}_{23}\boldsymbol{a}_{32})-\boldsymbol{a}_{21}(\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{33}-\boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{a}_{32})+\boldsymbol{a}_{31}(\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{23}-\boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{a}_{22})$$
$$=\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{a}_{33}-\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{23}\boldsymbol{a}_{32}-\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{33}+\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{a}_{32}+\boldsymbol{a}_{31}\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{23}-\boldsymbol{a}_{31}\boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{a}_{22}$$

＜ｎ次行列の展開＞

n 次行列 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{i\,j})$ の場合は余因子 $\Delta_{i\,j}$ を用いて次のように展開する

$\boldsymbol{j}$ 列による展開

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_{i\,j}\Delta_{i\,j}=\boldsymbol{a}_{1j}\Delta 1_{i\,j}+\boldsymbol{a}_{2\,j}\Delta_{2\,j}+\cdots+\boldsymbol{a}_{n\,j}\Delta_{n\,j}$$

$\boldsymbol{i}$ 行による展開

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{i\,j}\Delta_{i\,j}=\boldsymbol{a}_{i\,1}\Delta 1_{i\,1}+\boldsymbol{a}_{i\,2}\Delta_{i\,2}+\cdots+\boldsymbol{a}_{i\,n}\Delta_{i\,n}$$

＜サラスの方法①＞横並びにして

$$\begin{matrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} & \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} & \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} & \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{matrix}$$

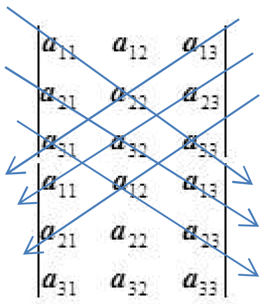
加えるもの $\Delta^{+}=\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{a}_{33}+\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{23}\boldsymbol{a}_{31}+\boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{32}$

$$\begin{matrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} & \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \boldsymbol{a}_{13} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} & \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \boldsymbol{a}_{23} \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} & \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & \boldsymbol{a}_{33} \end{matrix}$$

引くもの $\Delta^{-}=-\boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{a}_{31}-\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{33}-\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{23}\boldsymbol{a}_{32}$

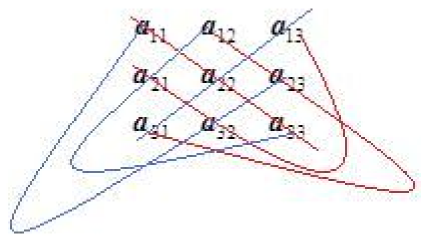
$$\Delta^{+}+\Delta^{-}=\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{a}_{33}+\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{23}\boldsymbol{a}_{31}+\boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{32}-\boldsymbol{a}_{13}\boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{a}_{31}-\boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{a}_{33}-\boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{a}_{23}\boldsymbol{a}_{32}$$

＜サラスの方法②＞



$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$

＜サラスの方法③＞赤線プラス・青線マイナス



$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

＜数ベクトル空間と線形写像（1 次写像）＞

n 次元の数ベクトル空間上の写像 $f : R^n \to R^m$ で

和とスカラー倍が定義されるとき

$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad f(kx) = kf(x)$ を満たすとき、

線形写像と呼ばれ、さらに $m = n$ のとき 1 次変換（線形変換）と呼ぶ

＜行列で表される線形写像＞

写像 $f : R^n \to R^m$ で $f(x) = Ax$ は線形写像であり、$g(x) = Bx$ のとき、その合成写像 $f((g(x)) = f \circ g(x) = ABx$ も線形写像となる。さらに、逆写像 $f^{-1}(x) = A^{-1}x$

その他の記号

$f(x) = Ax$ は f_A 、$f^{-1}(x) = A^{-1}x$ は $f_{A^{-1}}$ 、$f \circ g(x) = ABx$ は f_{AB}

と表記される場合もある

＜写像の核 Kernel と像 Image＞

写像 $f : R^n \to R^m$ で f の核：$Ker\ f = \{x \in R^n | f(x) = 0\}$

f の像：$\mathrm{Im}\ f = \{f(x) | x \in R^n\}$

その他の記号

f の核：$f^{-1}(0)$ 、　f の像：$f(R^n)$

$f : R^n \to R^m$ が線形写像のとき $Ker\ f$ は R^n の部分空間で、$\mathrm{Im}\ f$ は R^m の部分空間となる

　さらに、$\dim\ Ker\ f = rank\ A$

$\dim\ \mathrm{Im}\ f = n - rank\ A$

したがって、$\dim\ Ker\ f + \dim\ \mathrm{Im}\ f = n$

＜基底の法則＞

部分空間 $V = \langle a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r \rangle$ かつ $V = \langle b_1, b_2, b_3, \cdots, b_s \rangle$ のときは $r = s$ である。このとき空間 V の次元は r で $\dim V = r$ とかく

＜積空間と和空間＞

数ベクトル空間 R^n の部分空間 V_1, V_2 で

積空間：$V_1 \cap V_2 = \{\vec{v} | v \in V_1 \wedge v \in V_2\}$

$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2)$

和空間：$V_1 + V_2 = \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 | \vec{v}_1 \in V_1, \vec{v}_2 \in V_2\}$ で

$V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$ のとき $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ とかく

$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

＜直交変換＞

${}^tAA = E_n$ が成立するとき行列 A を直交行列と呼ぶ

この行列 A による線形変換 $f : R^n \to R^n$ を直交変換と呼ぶ

これは、長さや角度及び内積が変化しない変換である

つまり、${}^tAA = E_n \Leftrightarrow f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$

＜1 次独立と 1 次従属＞

3 次元空間上の任意のベクトルを $\vec{p}$ を

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ と書けるとき $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},$ が 1 次独立という

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せないとき 1 次従属という

（$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ のいずれかが同じ向きにある場合：例えば $\vec{a} = k\vec{b} \quad k :$ 実数）

判定法としては

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が 1 次従属 $\Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow rankA = 3$

別の表現方法をすると 4 個の 3 次元ベクトル線形和

各係数がすべて 0 の場合に限り、$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} + w\vec{p} = 0$ が成立する

とき $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ は 1 次独立といい、x, y, z, w のうち少なくとも 1 つが 0 でなくても成立するならば 1 次従属という

　この表記は n 次元のときも同様に表せるので、一般に

r 個の n 次元ベクトル $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$ の線形和で係数 $c_1, c_2, c_3, \cdots c_r$ のすべてが 0 のときに限り

$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 + \cdots + c_ra_r = 0$ が成立するとき 1 次独立

係数の少なくとも 1 つが 0 でなくても成立するならば 1 次従属という

このとき 1 次独立な r 個ベクトルで張られる空間の次元 $\dim V = r$

$A = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r)$ で、

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow rankA = r$ 　、$\dim V = rankA$

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$ が 1 次独立 $\Leftrightarrow a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$ が互いに直交

（$i \neq j$ で、互いに内積 $a_i \cdot a_j = 0$）

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$ が正規直交基底 $\Leftrightarrow a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$ が正規直交系をなしている（大きさ 1 で互いに直交）

クロネッカーのデルタ δ_{ij} を用いれば

（$i = j$ のとき $\delta_{ij} = 1$ 、$i \neq j$ とき $\delta_{ij} = 0$）

任意の i, j で、内積 $a_i \cdot a_j = \delta_{ij} \Leftrightarrow a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$ が正規直交基底

＜シュミット Schmidt の直交化＞

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_r$ を R^n の r 次元部分空間 V の基底として、

正規直交基底として、$e'_1, e'_2, e'_3, \cdots, e'_r$ を帰納的に定義する

$b_1 = a_1$ で、 $e'_1 = \dfrac{1}{|b_1|} b_1$

$b_2 = a_2 - (a_2 \cdot e'_1) e'_1$ で、 $e'_2 = \dfrac{1}{|b_2|} b_2$

$b_3 = a_3 - (a_3 \cdot e'_2) e'_2 - (a_3 \cdot e'_1) e'_1$ で、$e'_3 = \dfrac{1}{|b_3|} b_3$

$\cdots$

$b_r = a_r - \sum_{i=1}^{r-1} (a_r \cdot e'_i) e'_i$ で、 $e'_r = \dfrac{1}{|b_r|} b_r$

と正規直交基底が作れる

＜直交補空間の性質＞
すべての元と直交する元からなる部分集合を

直交補空間：$V^{\perp} = \{x \in R^n | \forall v \in V \quad x \cdot v = 0\}$のとき

$R^n = V \oplus V^{\perp}$ （直和である$V \cap V^{\perp} = \{\vec{0}\}$）

したがって、$\dim V^{\perp} = n - \dim V$
さらに、$(V^{\perp})^{\perp} = V$
＜直交射影＞
$R^n = V \oplus V^{\perp}$と直和分解され
この直和が定めるR^nからVへの射影を、
この直和が定めるR^nからVへの直交射影と呼ぶ

具体的な書き方をすると

次の①②の成立する写像$f : a \to x_0$ 　ここで$a \in R^n$、$x_0 \in V$

① その距離：$\overline{ax_0} = |a - x_0| = \sqrt{a_{r+1}^2 + \cdots a_n^2}$

② $a - x_0 \in V^{\perp}$が成立

なぜなら
VをR^nの r 次元部分空間として$a \in R^n$をとり
Vの正規直交基底$b_1, b_2, b_3, \cdots, b_r$とすると、これを含む基底
$b_1, b_2, b_3, \cdots, b_r, b_{r+1}, \cdots, b_n$が正規直交基底であるようにとれる
（シュミットの直交化）
$a = a_1 b_1 + \cdots + a_r b_r + a_{r+1} b_{r+1} + \cdots + a_n b_n$とおけば

V上で$a \in R^n$に近い点x_0は$x_0 = a_1 b_1 + \cdots + a_r b_r$と表せるからである

例示

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$は

曲面をxy平面上に写す直交射影

＜内積＞

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 　のとき、$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$

内積の記号の色々

$A \cdot B = (A, B) = {}^t AB = |A||B| \cos\theta$で計算結果は実数

＜ベクトルのなす角＞
平面と同様に$\cos\theta = \dfrac{A \cdot B}{|A||B|}$ 　直交条件$A \cdot B \Leftrightarrow A \cdot B = 0$
＜内積と転置の公式＞
$A\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot {}^t A \vec{y}$
＜ベクトルの長さ（絶対値）＞

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$で、$|A|^2 = A \cdot A = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$

したがって、$|A| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$

＜外積＞
記号として 3 次元までは$A \times B$（cross product） 一般化した$A \wedge B$（wedge product）も使用可であり、計算結果はベクトル

3 次の場合は

$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 　のとき、

基本ベクトル（基底）$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$として

基本ベクトル表示すると

$$A \times B = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

成分表示すると

$$A \times B = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

覚え方は→の行を抜かして、行列式を 1 行目から順次作り成分にする係数は+1、－1、+1 の順

$$\begin{matrix} + \to & a_1 & b_1 \\ - \to & a_2 & b_2 \\ + \to & a_3 & b_3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad A \times B = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

これは、2 つのベクトルAとBに垂直なベクトルで、

長さは$|A \times B| = |A||B| \sin\theta$ （平行四辺形の面積）

＜外積の性質＞
元の 2 ベクトルと垂直である
$A \perp A \times B \quad B \perp A \times B$

証明は $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$ より示すことができる
これは高次元でも成立する
＜固有値と固有ベクトル＞
高校では2次の正方行列 A において $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を満たす実数 $\boldsymbol{\lambda}$ を固有値、$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を固有ベクトルとして扱ったが

一般にｎ次行列 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})$ において、$\vec{x}\neq\vec{0}$ のとき変換しても方向が変わらず $\boldsymbol{\lambda}$ 倍になる。つまり
$\boldsymbol{A}\vec{x}=\lambda\vec{x}$
を満たす実数 $\boldsymbol{\lambda}$ を固有値、$\vec{x}$ を固有ベクトルと呼ぶ。$\boldsymbol{A}\vec{x}=\lambda\vec{x}$ のｎ次元ベクトルを省略して $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ と表記することもある。 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$ を変形して $\boldsymbol{Ax}-\lambda\boldsymbol{x}=0$ さらに変形して、
$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{x}=0$ の自明でない解を持つので

$\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}_n\right|=0$ となる（$\boldsymbol{E}_n$ ：ｎ次の単位行列）

このｎ次方程式（固有方程式）の解が $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$ が固有値、
それぞれの固有値に対応する固有ベクトル $\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\cdots,\vec{p}_n$ が定まる。具体的には $\vec{p}_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ $\vec{p}_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ $\cdots$ $\vec{p}_n=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{pmatrix}$ の形である

固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$ に重解があるとき
例えば λ_1 がｋ重解のとき重複度ｋという
＜対称行列の固有ベクトル＞
対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直行する
＜固有空間＞
ｎ次元の数ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間

$\left\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n \middle| (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{x}=0\right\}$ を固有空間と呼ぶ

＜行列の対角化＞

ｎ次行列 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})$ が正則行列ならば対角化可能で

各固有ベクトルから作った行列 $\boldsymbol{P}=\left(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\cdots,\vec{p}_n\right)$ のとき $\boldsymbol{P}$ の逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ として、固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$ のとき

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\cdots&0\\0&\lambda_2&0&0\cdots&0\\0&0&\lambda_3&0\cdots&0\\0&0&0&\ddots&0\\0&0&0&0\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$$ となる

この両辺の左から $\boldsymbol{P}$ 、右から逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$ をかけると
$\boldsymbol{PBP}^{-1}=\boldsymbol{PP}^{-1}\boldsymbol{APP}^{-1}=\boldsymbol{A}$ だから

$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_{ij})$ は変形されて、$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBP}^{-1}$ とかける

これを行列 A の対角化と呼ぶ
＜対角化された行列 A のｎ乗＞
2次のときと同様に
各固有ベクトルから作った行列 $\boldsymbol{P}=\left(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\cdots,\vec{p}_n\right)$
固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$ のとき

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0&0&0\cdots&0\\0&\lambda_1^n&0&0\cdots&0\\0&0&\lambda_1^n&0\cdots&0\\0&0&0&\ddots&0\\0&0&0&0\cdots&\lambda_1^n\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$ とかける

＜1次変換を表す行列＞
$\vec{y}=\boldsymbol{A}\vec{x}$ は

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$ であり

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$$ と線形結合である

この変換により基本ベクトル

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\cdots\vec{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$ は、それぞれ

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}\vec{a}_3=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\\vdots\\a_{m3}\end{pmatrix}\cdots\vec{a}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$$ に移る

＜1次変換の計算法則＞
① $\boldsymbol{A}(\vec{x}+\vec{y})=\boldsymbol{A}\vec{x}+\boldsymbol{A}\vec{y}$
② $\boldsymbol{A}(k\vec{x})=k(\boldsymbol{A}\vec{x})$

＜実2次形式 quadratic form＞
$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=(x\quad y)\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とかける
内積の記号を使うと
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とかくことができる

対称行列 $\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ の固有値 λ_1,λ_2 のとき
$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=\lambda_1x'^2+\lambda_2x'^2$ と変形される

$f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^3+2pxy+2qyz+2rzx$

$=(x\quad y\quad z)\cdot\begin{pmatrix}a&p&r\\p&b&q\\r&q&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とかける

対称行列$\begin{pmatrix} a & p & r \\ p & b & q \\ r & q & c \end{pmatrix}$の固有値$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$のとき

$$f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2pxy+2qyz+2rzx=\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$$

と変形される

一般に$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$を${}^txAx$の形にかくと

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j$$

$$=(x_1\quad x_2\cdots x_n)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\cdot$$ で、

$A=PBP^{-1}$で$Ax=x'$、${}^txAx={}^tx'({}^tPAP)x'$から

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i'^2$と変形される

したがって、$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$すべてが正ならば正値定符号(正定値)
$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$すべてが負ならば負値定符号(負定値)
$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_n$が正と負混在ならば（不定値）

＜2次曲線＞

$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2$と変形されるので

2次曲線$f(x,y)+k=0$の標準形は$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\dfrac{|\widetilde{A}|}{|A|}=0$

・楕円：$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\dfrac{|\widetilde{A}|}{|A|}=0\ (|A|>0, r=2, s=3)$

・双曲線：$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\dfrac{|\widetilde{A}|}{|A|}=0\ (|A|<0, r=2, s=3)$

・放物線： $(a+b)x'^2+2py'=0\ (|A|=0, r=1, s=3)$

・交わる2直線(実)：$\lambda_1x'^2+\lambda_2x'^2=0\ (|A|>0, r=2, s=2)$

・交わる2直線(虚)：$\lambda_1x'^2+\lambda_2x'^2=0\ (|A|<0, r=2, s=2)$

・平行な2直線：$(a+b)x'^2+q=0\ (|A|=0, r=1, s=3)$

・重なる2直線：$(a+b)x'^2=0\ (|A|=0, r=1, s=1)$

$\lambda_1,\lambda_2,|A|,|\widetilde{A}|$の符号により

① 円：$x^2+y^2=r^2$

② 楕円：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\qquad (r=2, s=3)$

③ 双曲線：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\qquad (r=2, s=3)$

④ 放物線：$y^2=4px\qquad (r=1, s=3)$

⑤その他、２直線（交わる、平行、重なる）

＜2次曲面＞

$f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2pxy+2qyz+2rzx$
$=\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2$ と変形される

ので$f(x,y,z)+k=0$の標準形は$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2+\dfrac{|\widetilde{A}|}{|A|}=0$

$|\widetilde{A}|=0$のとき

$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2=0$（2次垂面）

このとき、$rank\ A=r$、$rank\ \widetilde{A}=s$とすると

$r=s=3$

$|\widetilde{A}|\neq 0$のとき有心2次曲面

$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2=0$（標準形）と呼ばれ、

ここで、$rank\ A=r$、$rank\ \widetilde{A}=s$とすると

$r=3$, $s=4$である。

$\lambda_1,\lambda_2,\lambda3,|A|,|\widetilde{A}|$の符号により

① 球面：$x^2+y^2+z^2=r^2$

② 楕円面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

③ 一葉双曲線：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

④ 二葉双曲線：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

⑤ 虚楕円面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

$rank\ A=r$、$rank\ \widetilde{A}=s$とすると

・楕円柱面、双曲柱面：$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+q=0\ (r=2, s=3)$
・平行な2平面：$\lambda_1x'^2+q=0\ (r=1, s=2)$
・交わる2平面：$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2=0\ (r=2, s=2)$
・重なる2平面：$\lambda_1x'^2=0\ (r=1, s=1)$

さらに1次変換と平行移動により

$\lambda_1x''^2+\lambda_2y''^2+2\varepsilon z''=0\ (r=2, s=4)$で

ここで、εは、$|\widetilde{A}|=|\widetilde{A}''|=-\lambda_1\lambda_2\varepsilon^2$を満たす値で、

$\lambda_1\lambda_2>0$のとき楕円放物面
$\lambda_1\lambda_2<0$のとき双曲放物面
放物柱面：$\lambda_1x''^2+2\varepsilon\ y''=0\ (r=1, s=3)$