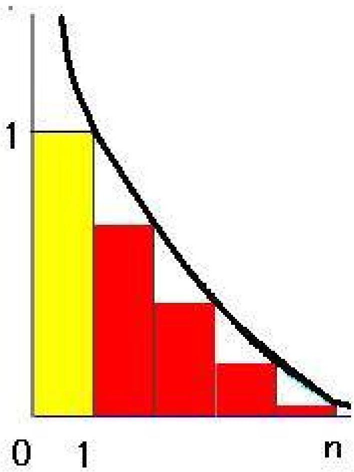
ファイル no.5

＜区分求積の詐欺Ｉ＞

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ を証明せよ。

以下に証明する。

注意：$\int_0^1\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_0^1$ は計算出来ないので、工夫しなければならない。




上図の黄色い部分の面積が、$1\times1=1$ であるが、それを別扱いする。

図の関係から

$$1+\int_1^n\frac{1}{x^2}dx>\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n>\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$1+1-\frac{1}{n}>\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}$$

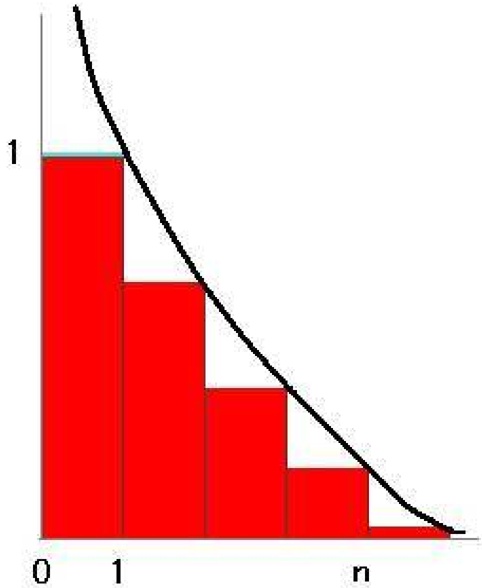
$$\therefore 2-\frac{1}{n}>\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}$$

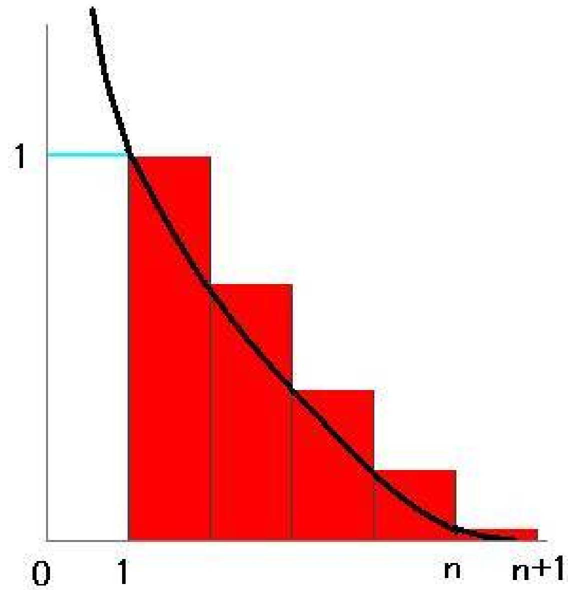
＜区分求積の詐欺Ⅱ＞

$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n \quad (n\geq 2)$ を証明せよ。

注意：$\int_0^1\frac{1}{x}dx=\left[\log|x|\right]_0^1$ は計算出来ないので、積分の範囲に０がこないように工夫しなけれ

ばならない。




証明は以下のようにする。

$n \geq 2$ で図の関係から、長方形の面積の和（赤い部分）右に 1 ずらしたものを考えると

$$I_1 = 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + [\log x]_1^n = 1 + \log n$$

$$I_2 = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1)$$

これらを、長方形の面積の和と比較すると

$I_2 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < I_1$ が成立する。

$$\therefore \log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots\cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n \quad (n \geq 2)$$

**＜おまけ＞**

**区分求積法と積分のアイデアとなったものです。**

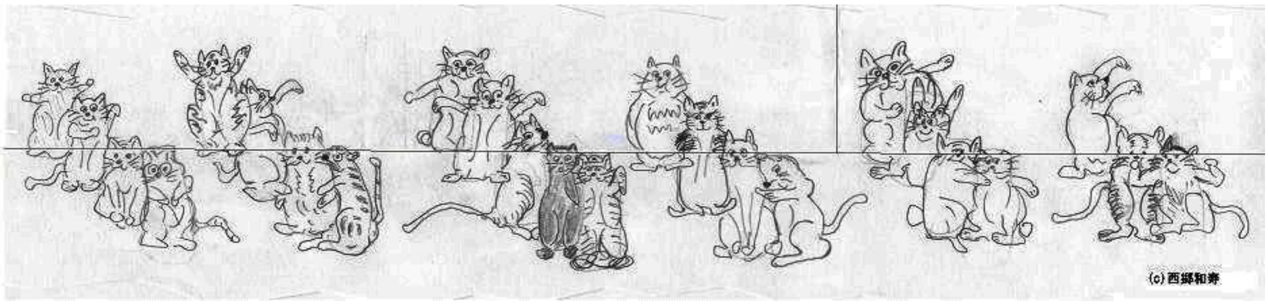
**下の絵を切り取って、さらに線に沿って 3 つの部分に切り分けます。**

**さて、下の絵にマウスを重ねると左右が入れ替わります。**

**あら不思議！！猫が二匹消えました！？**

**プリントアウトして切り取り、実際に手作業で実験してください。**

**さてさて、どうしてでしょうか？**


(c) 西郷和寿