数学 I

＜式の計算＞

（１）指数法則

①$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

②$(a^m)^n = a^{mn}$

③$(ab)^n = a^n b^n$

（２）因数分解・乗法公式

①$acx^2 + (ad+cd)x + bd = (ax+b)(cx+d)$　（いわゆる、たすき掛け）

②$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

③$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

④$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

⑤$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2$

⑥$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

上記の複号は同順である

余裕があれば、以下の公式も知っていると良い

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

[良くある式の変形]

①$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

②$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

③$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

[因数分解の一般的解法]

①　ある文字について整理する（次数が低いものが良い）

②　公式が使える様に変形するか、因数定理の利用（数Ⅱ）

＜整数の性質＞

倍数・約数・最大公約数・最小公倍数

$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ の最大公約数$\boldsymbol{G}$ 、最小公倍数$\boldsymbol{l}$ として

$\boldsymbol{a = Ga',\ b = Gb'}$ ならば

・$\boldsymbol{a'}$,$\boldsymbol{b'}$ は互いに素

・最小公倍数：$\boldsymbol{l = Ga'b'}$

・$\boldsymbol{ab = Gl}$　さらに$\boldsymbol{G = 1}$ならば最小公倍数$\boldsymbol{l = ab}$

＜割り算の性質＞

縦書きの割り算が出来ること

$f(x)$ を $g(x)$ で割って、商が$Q(x)$ で余りが$R(x)$ のときは、

$$\begin{array}{r} Q(x) \\ g(x)\overline{\big)\, f(x)} \\ ////// \\ \hline R(x) \end{array}$$

$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$ と書ける。

＜分数式計算＞

和や差での通分は式でも同様の計算である

$$\frac{b}{a} \pm \frac{d}{c} = \frac{bc}{ac} \pm \frac{ad}{ac} = \frac{bc \pm ad}{ad}$$　（複号は同順）

また、割り算（除法）は掛け算（乗法）に直してから計算すること

例えば

$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}$　（逆数をかける）

比例式の扱いは

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = t$ として $a = bt$, $c = dt$ とすると楽になることが多い

繁分数式→分母・分子に同じ多項式をかけて、普通の分数式になおす。$\dfrac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}} = \dfrac{\frac{d}{c}\times ac}{\frac{b}{a}\times ac} = \dfrac{ad}{bc}$

＜実数＞

（１）虚数の存在と複素数の四則計算

$i^2 = -1$ を用いる。特に、割り算は、分母に共役な複素数（$a+bi \Leftrightarrow a-bi$）を分母と分子に掛けることを用いて計算する。それ以外は、文字の計算と同じである。

（２）絶対値の処理

数直線上で、実数a と原点からの距離は、$|a|$

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{のとき}) \end{cases}$$

（３）平方根の計算

分母の有理化や四則計算は確実にできること

①$\sqrt{a^2} = |a|$ は、$(\sqrt{a})^2 = a$ とは違うことに注意せよ

②　２重根号を外すには、

$$\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

＜１次不等式と２次方程式＞

（１）１次不等式

①　不等式の性質

$a < b, c > 0$　ならば　$ac < bc$,　$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

$a < b, c < 0$　ならば　$ac > bc$,　$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

②　連立不等式

連立不等式は、数直線を利用して共通部分を求める。

③　絶対値を含む方程式・不等式

$c > 0$ のとき、方程式　$|x| = c$ の解は、$x = \pm c$

不等式　$|x| < c$ の解は、$-c < x < c$

不等式　$|x| > c$ の解は、$x < -c, c < x$

＜２次方程式＞

$ax^2+bx+c=0$ （$a\neq 0$）

（注） $a=0$ だと１次方程式になる

（１） ２次方程式の解法

① 因数分解を利用する

$(ax-b)(cx-d)=0$ から $x=\dfrac{b}{a}, x=\dfrac{d}{c}$

② 解の公式を用いる。

$ax^2+bx+c=0$ のとき、

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

また、b が偶数のとき（$b=2b'$）、

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

（２） ２次方程式の実数解の個数

判別式 $D=b^2-4ac$ を利用して、

$D>0$ ⇒異なる２実数解なので実数解２個

$D=0$ ⇒重解なので実数解１個

$D<0$ ⇒共役な虚数解なので実数解なし（０個）

（３）解と係数の関係

α,β が、方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解ならば

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

これを用いて、解の和と積が分かれば２次方程式を作ることができる。３次方程式の解と係数の関係も作れると良い。

α,β,γ が、方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解ならば

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$$

※ 数学Ⅰの式の変形より

① $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

② $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

③ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

＜１次関数とグラフ＞

傾き a とy軸との交点の座標 b（y切片）で表せる $y=ax+b$

※図形を表す方程式としての直線 $ax+by+c=0$

＜分数関数＞

$y=\dfrac{cx+b}{ax+b}$ のとき割り算の商と余りを利用して

$y=p+\dfrac{r}{x-q}$ と変形できる。このときグラフは、漸近線が、

$x=q, y=p$ の直角双曲線になる。

＜無理関数＞

$y=k\sqrt{f(x)}$ のグラフは、$y^2=k^2f(x)$ のグラフで、

$k>0$ のとき x 軸より上半分。

$k<0$ のとき x 軸より下半分。

特に、$y=\sqrt{ax+b}$ や $y=-\sqrt{ax+b}$ は完璧にしておくこと。

＜合成関数＞

$y=f(x)$ で $y=g(x)$ のとき、$y=f(g(x))$ or $y=g(f(x))$

例 $f(x)=x+1,\ g(x)=x^2$ のとき、合成関数は

$$f(g(x))=x^2+1 \text{ or } g(f(x))=(x+1)^2$$

＜逆関数＞

$y=f(x)$ が１：１のとき

$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

逆関数を作るには、定義域に注意して

$y=f(x)$ を x について解き $x=f^{-1}(x)$ とし、

ここで x と y を入れ替えて $y=f^{-1}(x)$ とする。

＜グラフの移動＞

元が $y=f(x)$ のグラフ

$y=-f(x)$：x 軸対称

$y=f(-x)$：y 軸対称

$y=-f(-x)$：原点対称

$y-q=f(x-p)$：平行移動

$y=f^{-1}(x)$：直線 $y=x$ 対称

$2b-y=f(2a-x)$：点 (a,b) 対称

＜２次関数とグラフ＞

$y=ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$ （$a\neq 0$）

$=a(x-\alpha)(x-\beta)$

①平方完成して、頂点 (p,q) を決定する

②判別式 $D=b^2-4ac$ で x 軸との関係を調べる

③最大値・最小値に関しては、定義域に注意する

④関数 $y=f(x)$ の平行移動：$y-q=f(x-p)$

⑤関数の決定

1. $y=ax^2+bx+c$
2. $y=a(x-p)^2+q$
3. $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

このうちのどれを使うかは、問題によって使い分ける。

また、両軸やグラフとの位置関係から２次方程式の解の配置（実数解の存在や符号等々）を調べることができる

$ax^2+bx+c=0$ のとき判別式 $D=b^2-4ac$ を利用して、

$D>0$ ⇒ x 軸との交点２個（異なる２実数解）

$D=0$ ⇒なので x 軸と接する（重解）

$D<0$ ⇒ x 軸と交わらない（共役な虚数解）

＜２次不等式＞

２次不等式の解は、２次関数のグラフから考える。

（１）判別式$D=b^2-4ac>0$のとき

①$ax^2+bx+c<0$の解は、$\alpha<x<\beta$

②$ax^2+bx+c>0$の解は、$x<\alpha, \beta<x$

（２） 判別式$D=b^2-4ac=0$のとき

①$ax^2+bx+c<0$の解は、ない

②$ax^2+bx+c>0$の解は、$x=\alpha$以外のすべての実数

③$ax^2+bx+c\leqq 0$の解は、$x=\alpha$

④$ax^2+bx+c\geqq 0$の解は、すべての実数

（３） 判別式$D=b^2-4ac<0$のとき

①$ax^2+bx+c<0$の解は、ない

②$ax^2+bx+c>0$の解は、すべての実数

③$ax^2+bx+c\leqq 0$の解は、ない

④$ax^2+bx+c\geqq 0$の解は、すべての実数

＜式と証明＞

分数式

① 分母，分子をそれぞれ因数分解し、約分する。→既約分数式

② 加法，減法については、分母を通分し分子の計算をする。

（３）恒等式

① 数値代入法

② 係数比較法

（４）等式の証明

①左辺＝・・・変形・・・＝右辺

② 左辺＝・・変形・・＝δ

右辺＝・・変形・・＝δ $\therefore$ 左辺＝右辺

③ 左辺―右辺＝０を示せば良い

条件付での等式の証明では、文字を消去することを考える。特に連比の形で条件が与えられえた場合は、比の値をkとおくとよい。

$x:y:z=a:b:c$ ならば、$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおき、

$x=ak, y=bk, z=ck$を与式に代入して処理する。

（５）不等式の証明

① 左辺＞右辺を示すには、左辺―右辺＞０を示せば良い

つまり、

左辺―右辺＝・・変形・・＝δ＞０の形

変形には、与えられた条件に注意して因数分解や平方完成を利用して示す場合が多い。$\sqrt{\ }$や$|\ |$記号が入った場合は、両辺が正であることを確認し、$(左辺)^2-(右辺)^2$＞０を示す。

（注）≧のように等号付きのときは、等号が成立するときをいう。

②左辺＞右辺を示すのに、左辺＞δかつδ＞右辺から示す。

さらに、[相加・相乗平均の関係]

$a>0, b>0$のとき

$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ （等号は$a=b$のとき成立）

が成立することを利用する方法がある。

さらに、余裕があれば、以下の方法も知っていると良い

絶対不等式を利用する場合がある。有名な絶対不等式には、シュワルツの不等式

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$がある。

また、次の式変形は有名で右辺が$(実数)^2\geqq 0$の和なので、左辺$\geqq 0$を示すことができる（等号は$a=b=c$で成立）

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

＜剰余の定理＞

$f(x)$を$g(x)$で割って、商が$Q(x)$で余りが$R(x)$のときは、

$$\begin{array}{r} Q(x) \\ g(x)\overline{\big)\,f(x)} \\ ////// \\ \hline R(x) \end{array}$$

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$と書けるが、とくに$g(x)=x-\alpha$のとき、

$f(\alpha)=R \Leftrightarrow f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$、割った余りが$f(\alpha)$

$g(x)=ax+b$のとき、

$f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=R \Leftrightarrow f(x)=(ax+b)Q(x)+R$、割った余りが$f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

＜因数定理＞

$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(x)=(x-\alpha)Q(x)$

つまり、$f(x)$は、$x-\alpha$という因数をもつ

高次方程式は上記因数定理の利用で解く場合が多い。

＜図形と方程式＞

① ２点間の距離

$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$のとき

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

② m：nに分ける点

$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$のとき、線分ABをm：nに分ける点は、

$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

注）$mn<0$のとき外分点

③ 三角形の重心

３点$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)$を頂点とする△$ABC$の重心$G$の座標は、$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

④ 点に関して対称な点

点$A(a,b)$に関して２点$P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$が対称なとき、

$a=\dfrac{x_1+x_2}{2}$， $b=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ が成り立つ。

⑤ 直線の方程式

傾きmで、点(x_1,y_1)を通る：$y-y_1=m(x-x_1)$

２点(x_1, y_1) (x_2, y_2) を通る：$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

注）分母、または、分子が０のときは座標軸と平行な直線

$x = x_1$, $y = y_1$ となる。

⑥　２直線の位置関係

２直線の傾きが、m_1, m_2 のとき

平行：$m_1 = m_2$　（一致の場合も平行に含める）

垂直：$m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$　（または、$m_1 \cdot m_2 = -1$）

さらに、余裕があれば以下の公式も知っていると良い

一般形の場合は、$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

平行：$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

垂直：$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

⑦　直線に関して対称な点

２点A, B が直線ℓ に関して対称なとき、つぎの２つの事柄が成り立つ。

［1］　直線AB はℓ に垂直である。

［2］　直線AB の中点はℓ 上にある。

⑧　点と直線の距離

点(x_1, y_1) と直線$ax + by + c = 0$ の距離d は、

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

⑨　円の方程式

一般形：$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$

平方完成により、

標準形：$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

となり、中心(a, b) で半径r の円を得る

⑩　円と直線の関係

接点が点(x_1, y_1) で原点を中心とする円のとき

接線：$x_1x + y_1y = r^2$

接点が点(x_1, y_1) で中心(a, b) の円のとき

接線：$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

交点の数に関しては、判別式の利用か、中心と直線までの距離を利用して調べることが出来る。

⑪　不等式と領域

直線の上部：$y > ax + b$

直線の下部：$y < ax + b$

曲線の上部：$y > f(x)$

曲線の下部：$y < f(x)$

円の内部：$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$

円の外部：$(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$

注）領域内かどうかは、点の座標を代入して成立するかどうかで調べることが出来る。また、境界を含むかどうかは必ずチェックすること。

＜集合＞

ベン図の利用と記号と用語の使用法を確実にする

属する：$x \in A$

共通部分：$A \cap B$

和集合：$A \cup B$

補集合：$\overline{A}$

部分集合：$A \subset B$

要素の個数については、

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B \cup C) =$

$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

※ド・モルガンの法則について確認すること。

＜命題＞

条件文：$p \to q$ の逆･裏・対偶を作ることが出来るようにし、その真偽の判定や証明が出来ること。真偽の判定や証明は集合の包含関係を用いる場合や『元の命題の真偽と対偶の真偽が一致する』ことを用いる。必要条件・十分条件の判断。

[背理法]

結論を否定して推論を進めると、既知事項と矛盾することを示すという証明方法である。

＜三角比＞

値を決定できること、逆に角度を決定できること。

三角方程式・不等式を解けること。

（1）相互関係

①$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

②$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

③$\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

（2）正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

（R は、外接円の半径）

（3）余弦定理（２辺b, c と挟む角A）

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

３辺から角を求める時、余弦定理を変形して

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

（4）三角形の面積（２辺b, c と挟む角A）

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

※　内接円の半径r を求めることへ応用される

$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$ より

$r=\frac{2S}{a+b+c}$

さらに、余裕があれば、以下のヘロンの公式も知っていると良い

面積 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ （s は三角形の周の半分）

＜平面図形＞

（１） 三角形の成立条件

三角形の３辺の長さが a,b,c のとき、$|a-b|<c<a+b$ 　が成り立つ。

（２） 三角形の５心

① △ＡＢＣの３辺の垂直二等「分線は１点Ｏ（外心）で交わる。
外心は外接円の中心である。

② △ＡＢＣの各頂点から対辺に下ろした３つの垂線は
１点Ｈ（垂心）で交わる。

③ △ＡＢＣの３つの内角の二等分線は１点Ｉ（内心）
で交わる。内心は内接円の中心である。

④ △ＡＢＣの３つの中線は１点Ｇ（重心）で交わる。
重心は中線を２：１の比に内分する。

④ △ＡＢＣの１つの内角の二等分線と他の２つの頂点に
おける外角の二等分線は１点（傍心）で交わる（３つある）。
傍心は傍接円の中心である。

（３） 円周角

① 同じ弧に対する円周角は等しい。

② 円周角は中心角の半分である。

③ 直径に対する円周角は直角である。

④ 円周角の定理の逆
４点Ａ，Ｂ，Ｐ，Ｑについて、Ｐ，Ｑが直線ＡＢに
対して同じ側にあって、∠ＡＰＢ＝∠ＡＱＢならば
この４点は同一円周上にある。

（４） 円に内接する四角形

① 内接四角形⇔向かい合う内角の和は 180° である。

② 内接四角形⇔１つの内角は向かい合う角の外角に等しい。

（５） 接弦定理

ＡＴが点Ａにおける円の接線ならば

∠ＢＡＴ＝∠ＡＰＢ

（注）逆も成り立つ。

∠ＢＡＴ＝∠ＡＰＢ 　ならば、ＡＴは点Ａに
おける円の接線である。

（６） 方べきの定理

① 点Ｐを通る２直線が円と点Ａ，Ｂおよび
Ｃ，Ｄで交わるとき（図１，２）

ＰＡ・ＰＢ＝ＰＣ・ＰＤ

② 円の弦ＡＢの延長上の点Ｐから、円に
引いた接線をＰＴとするとき（図３）

ＰＡ・ＰＢ＝ＰＴ^2

（注）方べきの定理は逆も成り立つ。

※ ２つの円の位置関係、共通接線についても確認しておく。