基礎解析

＜三角関数＞

① 一般角

$\theta = \alpha^\circ + 360^\circ \times n$　　（n は、整数）

② 弧度法

180°　＝π（ラジアン）

一般角

$\theta = \alpha + 2n\pi$　　（n は、整数）

③ 扇形の弧の長さと面積

半径が r 、中心角が θ（ラジアン）の扇形の弧の長さを ℓ 、面積をＳとすると

$$\ell = r\theta, \quad \mathrm{S} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r\ell$$

④ 相互関係

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

⑤ 三角関数の性質

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$　$\cos(-\theta) = \cos\theta$　$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\theta \pm \dfrac{\pi}{2}$ や $\theta \pm \pi$ は、図から求めるか、加法定理利用。

⑥ グラフは、１周期分を覚えていること

振幅や周期の変化、平行移動について確実にしておくこと

例えば、　$y = a\sin b(x-\alpha) + c$

⑦ 加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

⑧ ２倍角・半角・３倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} \qquad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

⑨ 積和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

⑩ 和積の公式

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

⑪ 三角関数の合成

$$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$$

ただし、$r = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

注）図を用いて求める方法が便利である。

＜指数関数＞

① 累乗根の計算法則

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \qquad \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

② 指数の拡張

$$a^0 = 1, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

指数法則は、r, s が実数の範囲で成立する。

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{rs} \qquad (ab)^r = a^r b^r$$

③ 指数関数のグラフ

$a > 1$ のときは単調に増加

$0 < a < 1$ のときは単調に減少

ともに、y 切片は１、点 $(1, a)$ を通る

④ 大小関係

$a > 1$ のときは、$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$

$0 < a < 1$ のときは、$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$

＜対数関数＞

① 対数の計算法則

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0, \ \left(\log_a \frac{1}{a} = -1 \right)$$

$$\log_a A + \log_a B = \log_a AB$$

$$\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B}$$

$\log_a A^n = n\log_a A$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ （底変換の公式）

余裕があれば以下の式は覚えると便利である。

$\log_{a^n} b^n = \log_a b$, $a^{\log_a b} = b$

② 対数関数のグラフ

$a>1$ のときは単調に増加

$0<a<1$ のときは単調に減少

ともに、x 切片は１、点 $(a,1)$ を通る

指数関数とは、直線 $y=x$ に関して対称である

③ 大小関係

$a>1$ のときは、$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x>y$

$0<a<1$ のときは、$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x<y$

また、真数条件 $x>0,\ y>0$ に注意せよ。

④ 常用対数（底が１０の対数）

$\log_{10} x$ の値で、x の桁数や小数点以下第何位に初めて０でない数が現れるかを調べることが出来る。

$n-1 \leqq \log_{10} x < n \Leftrightarrow x$ が n 桁の数

$-n \leqq \log_{10} x < -(n-1) \Leftrightarrow x$ は、小数点以下第 n 位に初めて０でない数が現れる

＜数列＞

等差数列：$a_n = a+(n-1)d$ $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

等比数列：$a_n = ar^{n-1}$ $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ $(r \neq 1)$

数列の和の記号 $\sum$ について

①$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

②$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

③$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

⑤$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

さらに余裕があれば、以下の公式も知っていると良い

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

階差数列：$a_{n+1}-a_n = b_n$ のとき

$a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$ （$n \geq 2$）

和と一般項の関係は

$a_1 = S_1$ $a_n = S_n - S_{n-1}$ （$n \geq 2$）

漸化式の解法

等差数列 $a_{n+1}-a_n = d$ や等比数列 $a_{n+1} = ra_n$ の利用

また、階差数列の利用 $a_{n+1}-a_n = b_n$ の利用。

有名なものには、

$a_{n+1} = pa_n + q$ $(p \neq 1) \to \alpha = p\alpha + q$

を満たす α を用いて→ $a_{n+1}-\alpha = p(a_n-\alpha)$ と変形すると

数列 $\{a_n-\alpha\}$ は、初項 $a_1-\alpha$ 公比 p の等比数列となるので、

$a_n - \alpha = (a_1-\alpha)\cdot p^{n-1} \to a_n = (a_1-\alpha)\cdot p^{n-1} + \alpha$

与えられた漸化式が２項間のときは、上記の形が多く、両辺の対数、逆数をとったり、あるもので割り算することにより $a_{n+1} = pa_n + q$ $(p \neq 1)$ の形に変形できる。

与えられた漸化式が３項間のときは、

$pa_{n+2} - qa_{n+1} + ra_n = 0$ の型になるもの

特性方程式：$px^2+qx+r=0$ の解で分類する。

２解が α, β のとき

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と $a_{n+2}-\beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$

と変形できる。

＜数学的帰納法＞

自然数に関するある命題を証明する方法

（Ⅰ）ある命題で、n=1 のときに成立することを示す。

（Ⅱ）ある命題で、n=k のとき成立を仮定して、n=k+1 のときも成立することを示す。

以上、（Ⅰ）（Ⅱ）より、すべての自然数についてある命題が成立することが証明される。

＜微分法＞

① 平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

② 微分係数 $f'(a) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

③ 関数の極限 $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}$ で、$\displaystyle\lim_{x\to\alpha} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$

④ 接線・法線

曲線 $y=f(x)$ 上の $x=a$ における接線の方程式は、

$y-f(a) = f'(a)(x-a)$

曲線 $y=f(x)$ 上の $x=a$ における法線の方程式は、

$y-f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

⑤　導関数の定義

定義：$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$y=c \Rightarrow y'=0$　　$y=x^n \Rightarrow y'=nx^{n-1}$

⑥　関数のグラフ

$f'(x)=0$ を満たす x を定義域内で調べ、増減表を作る

極大・極小・y 切片となる点に注意して描くが、場合によっては

$f(x)=0$ の解を求めて x 切片も得る。

⑦　最大・最小

定義域に注意して、増減表から判断する。

⑧　方程式・不等式への応用

グラフと直線との交点または上下関係を調べればよい。

・$f(x)=a \Rightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=a \end{cases}$　交点等を調べる

・$f(x)>g(x) \Rightarrow F(x)=f(x)-g(x)$ のグラフで調べる

（増減表のみで対応することもできる）

＜積分法＞

①　不定積分　$\int f(x)dx=F(x)+C$　（C ：積分定数）

$\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$

②　定積分　$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

性質：(1) $\int_a^a f(x)dx=0$

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

(4) $\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx$

(5) $\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & (f(x):\text{偶関数}) \\ 0 & (f(x):\text{奇関数}) \end{cases}$

(6) $f(x) \geqq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$

③　微分と定積分　$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

④　２曲線に囲まれた部分の面積

$S=\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}dx$

特に、α,β が、方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解ならば

$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx=-\dfrac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$

⑤　体積

切り口の面積が、$S(x)$ のときは $V=\int_\alpha^\beta S(x)dx$

$V=\pi\int_\alpha^\beta \{f(x)\}^2 dx$　　（回転体の体積）