微分・積分

＜数列の極限＞

収束：$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$　（極限値が α）

発散：$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$　（$+\infty$ に発散）

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$　（$-\infty$ に発散）

a_n が振動　（極限値なし）

・知っているべき数列の極限

(a) $k>0$ のとき $\lim_{n\to\infty} n^k = +\infty$　（$+\infty$ に発散）

(b) $k<0$ のとき $\lim_{n\to\infty} n^k = 0$　（極限値０）

(c) $\lim_{n\to\infty} a^n$ について、

$a \le -1$ のとき振動

$-1 < a < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

$a = 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$

$a > 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

・数列の極限に関する公式

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき

（$n\to\infty$ のとき、$a_n \to \alpha, b_n \to \beta$ とも書く）

(a) $a_n > b_n \Rightarrow \alpha \ge \beta$

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$、$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

（$\beta \ne 0$）が成立する。

・無限等比級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

収束・発散について数列の極限と混同しないように注意せよ

収束するのは、$-1<r<1$ のときのみで、その和は $\dfrac{a}{1-r}$

$r \ge 1$ のとき $a>0$ ならば $+\infty$ に発散で $a<0$ ならば $-\infty$ に発散

$r \le -1$ のときは振動（発散）する。

＜関数の極限＞

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$　または　$x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$ と表記する。

①$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$、$\lim_{x\to a} g(x) = \beta$　のとき以下が成立する

$\lim_{x\to a} cf(x) = c\alpha$　（c は定数）

$\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$　（複号同順）

$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　（$\beta \ne 0$）

②右方極限、左方極限について

$\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$、$\lim_{x\to a-0} f(x) = \beta$（極限の存在）

特に、$\alpha = \beta$ のとき、$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ と書くことができる

（つまり、右方極限と左方極限の一致する場合である）

③不定形の極限の対処法

$\dfrac{0}{0}$ 型のときは、分数式ならば約分、無理式は有理化

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型のときは、分母分子を分母の最高次数で割る

$\infty - \infty$ 型のときは、無理式は有理化、整式は最高次数の項でくくり出す

注）右方極限、左方極限は、$y = f(x)$ のグラフの概形を調べるときにも利用される。（漸近線の存在）

＜三角関数・指数関数・対数関数の極限＞

①$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$　（x は、ラジアン角）

②$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e \cong 2.718281$　（自然対数の底）

③指数関数・対数関数のグラフからも分かるように

(1) $a>1$ ときは

$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$、$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$、$\lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty$

(2) $0<a<1$ のときは

$\lim_{x\to+\infty} a^x = -\infty$、$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$、$\lim_{x\to+0} \log_a x = +\infty$

＜関数の連続性＞

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ のとき、すなわち $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し、それが $f(a)$ の値と一致する場合に、この関数は、$x = a$ で連続である

＜中間値の定理＞

閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ は、その区間で $f(a), f(b)$ の間の任意の値をとる。特に $f(a)f(b)<0$ ならば、区間 (a,b) に $f(c)=0$

となるcが、少なくとも１つ存在する。
（方程式の解の存在を示す場合に利用される。）
＜導関数＞

①　$x=a$における微分係数　$f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

②　導関数の定義：$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

＜微分法＞

①　積の微分：$y=f(x)g(x)\Rightarrow y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

②　商の微分：$y=\dfrac{g(x)}{f(x)}\Rightarrow y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2}$

③　合成関数の微分：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

$y=f(u)$で$u=g(x)$のとき、つまり
$y=f(g(x))\Rightarrow y'=f'(g(x))g'(x)$である

④　陰関数の微分：$F(x,y)=0$のとき、yをxの関数とみて両辺をxで微分する。yがxの関数のときは、

$\dfrac{d}{dx}f(y)=\dfrac{d}{dy}f(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}$を利用する

⑤　対数微分法：両辺の対数をとり、両辺をxで微分する。

⑥　逆関数の微分：$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{f'(x)}$

⑦　媒介変数表示された関数の微分
$x=f(t)$, $y=g(t)$　のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

＜高次導関数＞

$f''(x)=\dfrac{d}{dx}f'(x)$、　$f'''(x)=\dfrac{d}{dx}f''(x)$

$\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)=f^{(n)}(x)$　（n階微分）

＜基本的な関数の微分＞

$y=c\Rightarrow y'=0$　（cは定数）

$y=x^n\Rightarrow y'=nx^{n-1}$　（nは実数）

$y=\sin x\Rightarrow y'=\cos x$

$y=\cos x\Rightarrow y'=-\sin x$

$y=\tan x\Rightarrow y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$y=\log|x|\Rightarrow y'=\dfrac{1}{x}$

$y=\log_a|x|\Rightarrow y'=\dfrac{1}{x\log a}$

$y=e^x\Rightarrow y'=e^x$

$y=a^x\Rightarrow y'=a^x\log a$　（$a>0, a\neq 1$）

＜平均値の定理＞

①関数$f(x)$が区間$[a,b]$で$f'(x)$をもてば、$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

となるcが、区間(a,b)に少なくとも１つ存在する。

②表現の仕方を変えると以下の式を満たすθが存在する。

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$　（$0<\theta<1$）

（極限値を求める問題にも応用される）

＜接線・法線＞

接線：

曲線$y=f(x)$上の$x=a$における接線の方程式は、

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

法線：

曲線$y=f(x)$上の$x=a$における法線の方程式は、

$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

＜関数のグラフ＞

$y=f(x)$で、$y'=f'(x)$を求め$f'(x)$の符号を調べて関数の増減や極大値・極小値を調べるのは、数学Ⅱと同様だが、$y''=f''(x)$の符号を調べて、曲線の凹凸や変曲点を調べることができる。変曲点とは、グラフが下に凸から上に凸に変わる点、またはグラフが上に凸から下に凸に変わる点である。通常は、微分可能な点なので、$f''(x)=0$になるxの値の前後で符号が変わるかを調べることになる。微分可能な点ではないときは、極値と同様に注意を要することになる。

また、漸近線については、$\lim_{x\to a\pm 0}f(x)=\pm\infty$のとき$x=a$

$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$のとき、$y=ax+b$

さらに、グラフの対称性、座標軸との交点、不連続点、存在範囲に注意をして概形を描くことができる。

＜近似式＞

hが十分小さいとき

①１次の近似式

$f(a+h)\cong f(a)+f'(a)h$

$x=a+h$とすれば、

$f(x)\cong f(a)+f'(a)(x-a)$

さらに、xが十分０に近ければ

$f(x)\cong f(0)+f'(0)x$

特に、近似式　$(1+x)^p=1+px$は、有名である。

②２次の近似式

$f(a+h)\cong f(a)+f'(a)h+\dfrac{1}{2}f''(a)h^2$

③$|\Delta x|$が十分小さいときは、

$\Delta y=y'\Delta x$と考えて良い。

＜基本的な不定積分＞

積分定数をCとする

① $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ （$n \neq -1$）

② $\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C$

③ $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

④ $\int \cos x dx = \sin x + C$

⑤ $\int e^x dx = e^x + C$

⑥ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

＜積分法＞

① 置換積分

$g(x) = t$とおくと$g'(x)dx = dt$より

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

例：$ax+b=t,\ x^2=t,\ \sqrt{1-x}=t,\ \sin x = t$ 等々

または、$x = g(t)$とおき$dx = g'(t)dt$

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

例：$x = a\sin t,\ x = \tan t, x = at+b$ 等々

注意：定積分のときは、積分範囲が変わるので気をつけること

② 部分積分

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

注意：定積分のときは、求める積分をＩとおいて、繰り返し部分積分を使って求める方法がある。

③ 式の変形

積和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

その他、三角関数の公式、割り算、有理化、部分分数分解で対応する。

注意：置換積分と変形を組み合わせて、三角関数を有理式に変形する方法もあるが乱用は避けよう。

$\tan\frac{x}{2} = t$とおくと$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$で、

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$　$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$　$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$を利用できる

＜定積分＞

$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = \mathrm{S}$　（Sは符号付面積）

$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{\pi a^2}{2}$（円の半分の面積）は有名。

＜定積分の基本性質＞

(0) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_b^a f(x)dx$

(1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

(4) $\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx$

(5) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & (f(x):\text{偶関数}) \\ 0 & (f(x):\text{奇関数}) \end{cases}$

(6) $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

余裕があれば、シュワルツの不等式も覚えよう

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right)$$

＜微分と定積分＞

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$　（数学Ⅱと同じ）

＜区分求積＞

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$　$, x_k = a + k\Delta x$として、

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

積分を利用して極限値を求めることに利用される。計算を楽にするため以下の式が良く用いられる

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

＜面積＞

$y = f(x)$とx軸に挟まれた部分の面積

$$S = \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

２曲線に囲まれた部分の面積

$$S = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx$$

＜体積＞

切り口の面積が、$S(x)$ のときは$V=\int_\alpha^\beta S(x)dx$

$V=\pi\int_\alpha^\beta \{f(x)\}^2 dx$　（回転体の体積）

＜曲線の長さ＞

①$y=f(x)$ の孤の長さ

$$s=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$

②$x=f(t)$, $y=g(t)$ の孤の長さ

$$s=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt \text{ n}$$

＜速度・加速度・点の位置＞

時刻tの関数として、点の位置が$s=s(t)$のとき

$$\underset{\text{点の位置}}{s(t)} \xrightarrow{\text{微分}} \underset{\text{速度}}{v(t)} \xrightarrow{\text{微分}} \underset{\text{加速度}}{a(t)}$$

計算上は、$s'(t)=v(t), s''(t)=a(t)$

逆に考えて、$\underset{\text{加速度}}{a(t)} \xrightarrow{\text{積分}} \underset{\text{速度}}{v(t)} \xrightarrow{\text{積分}} \underset{\text{点の位置}}{s(t)}$

計算上は、$s(t)=\int_a^t v(t)dt+s(a)$ 、$v(t)=\int_a^t a(t)dt+v(a)$

注）平面運動のときは、ベクトルとして扱う。

速度ベクトル$\vec{v}=(v_x(t),v_y(t))$

加速度ベクトル$\vec{a}=(a_x(t),a_y(t))$

注）速さはベクトルの大きさ$|\vec{v}|$である。

＜道のり＞

$$l=\int_a^t |v(t)|dt$$

＜微分方程式＞（旧数Ⅲの内容入試用）

① 変数分離形 $\boldsymbol{f(y)dy=g(x)dx}$ と変形して、両辺を積分して解く$\boldsymbol{\int f(y)dy=\int g(x)dx}$

② 同次型の場合 $y=ux$ とおくと、変数分離形に帰着される $\boldsymbol{f(u)du=g(x)dx}$

例 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$

$y=ux$ とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(ux)^2-x^2}{2x(ux)}=\frac{u^2x^2-x^2}{2ux^2}=\frac{u^2-1}{2u}\quad\cdot\cdot\cdot①$$

また、$y=ux$ の両辺をxで微分すると

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot x+u\cdot 1=\frac{du}{dx}\cdot x+u\quad\cdot\cdot\cdot②$$

①②より $\dfrac{du}{dx}\cdot x+u=\dfrac{u^2-1}{2u}$　これは変数分離型である

$$\frac{du}{dx}\cdot x=\frac{u^2-1}{2u}-u\quad \therefore \frac{du}{dx}\cdot x=\frac{u^2-1-2u^2}{2u}=-\frac{u^2+1}{2u}$$

$$\therefore \frac{2u}{u^2+1}du=-\frac{1}{x}dx\qquad \therefore \int\frac{2u}{u^2+1}du=-\int\frac{1}{x}dx$$

$$\therefore \log\left|u^2+1\right|=-\log|x|+C\qquad (C:\text{積分定数})$$

$$\therefore \log\left|u^2+1\right|=C-\log|x|=\log e^C-\log|x|=\log\frac{e^C}{|x|}$$

$\therefore \left|u^2+1\right|=\dfrac{e^C}{|x|}$　$\therefore u^2+1=\dfrac{\pm e^C}{x}$ ここで $A=\pm e^C$ とおいて、さらに $u=\dfrac{y}{x}$ なので $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+1=\dfrac{A}{x}$　$\therefore$

$$x^2+y^2-Ax=0$$

参考：$\left(x-\dfrac{A}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{A}{2}\right)^2$ なので、原点でy軸に接する円である。

③ $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=ky}$ の一般解は $\boldsymbol{y=Ce^{kx}}$ （$\boldsymbol{C}$ は任意定数）