新教育課程（数学Ⅲ）

＜複素数平面＞（一部旧数C→数Ⅲ）

☆基本的には、複素数平面上の各点が、各複素数に対応していることを用いて、図形的な扱いが出来るようになっていることが必要である。特に回転に関して扱われることが多い。

図形問題を解く上では、複素数の計算の図形的意味（和・差は平行移動で、積・商は回転等）を考えて解く場合が多いが、絶対値を計算する方法で、ある複素数とそれに共役な複素数の積　$z\bar{z}=|z|^2$ を用いて解答することが良くある。また、複素数を極形式 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ に直せないと、ほとんど全ての問題は解けない。

$i^2=-1$ を用いる。特に、割り算は、分母に共役な複素数を分母に共役な複素数（$\boldsymbol{a+bi \Leftrightarrow a-bi}$　）を分母と分子に掛けることを用いて計算する。それ以外は、文字の計算と同じである。

＜複素数の大きさ・偏角＞（旧々数Ⅲ復活）

$z=a+bi$ のとき、$\boldsymbol{r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}}$

$z\bar{z}=|z|^2$ を利用することは頻出

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ で、偏角 $\arg z=\theta$

① 共役な複素数

$z=\bar{z}$ のとき、z は実数

$z=-\bar{z}$ のとき、z は純虚数（$z\neq 0$）

② 複素数平面（旧々数Ⅲ復活）

$z=a+bi$ を点 (a,b) と考える

・点 z とｘ軸（実軸）に関して対称な点　$\bar{z}$
・点 z とｙ軸に（虚軸）関して対称な点　$-\bar{z}$
・点 z と原点に関して対称な点　$-z$

③ 演算と図形的意味
和と差はベクトルと同じ扱いで処理
積は、回転して絶対値倍

④ ド・モアブルの定理（複素数のｎ乗を求めるには）

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

⑤ １のｎ乗根

$z^n=1$ はｎ個あり

$$z_k=\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\times k\right)+i\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\times k\right)\quad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

注）図と併用すると解きやすい

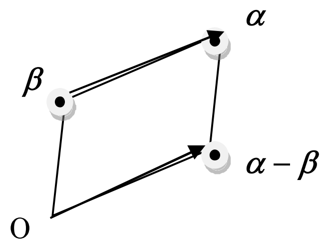
⑭ αのｎ乗根（$z^n=\alpha$）

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおき、両辺を極形式で表して比較せよ

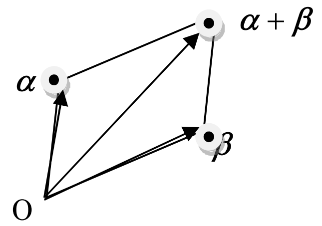
参考）$\alpha_k=\alpha_0 z_k$　$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$　z_k は上の１のｎ乗根

α_0 は、$z^n=\alpha$ の解のひとつ

⑮ 点 $\boldsymbol{\alpha-\beta}$ の位置関係（平行四辺形）



⑯ 点 $\boldsymbol{\alpha+\beta}$ の位置関係（平行四辺形）

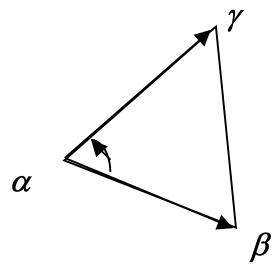


⑰ 点 $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ の距離 $|\boldsymbol{\beta-\alpha}|$

⑱ ｍ：ｎに分ける点：$\gamma=\dfrac{\boldsymbol{n\alpha+m\beta}}{\boldsymbol{m+n}}$

⑲ ２直線のなす角

$$\mathbf{arg}\frac{\boldsymbol{\gamma-\alpha}}{\boldsymbol{\beta-\alpha}}=\angle \boldsymbol{BAC}$$



垂直条件：

・$\dfrac{\boldsymbol{\gamma-\alpha}}{\boldsymbol{\beta-\alpha}}$ が純虚数 $\boldsymbol{AB\perp AC}$

・$\dfrac{\boldsymbol{\delta-\gamma}}{\boldsymbol{\beta-\alpha}}$ が純虚数 $\boldsymbol{AB\perp CD}$

（$-z=\bar{z}$ ならば z は純虚数と連動させて解く場合が多い）

・一直線上にある条件：

$\boldsymbol{\alpha=k\beta}$（実数倍）$\Leftrightarrow$ 3点 $\boldsymbol{O,A,B}$ が同一直線上

$\dfrac{\boldsymbol{\gamma-\alpha}}{\boldsymbol{\beta-\alpha}}$ が実数 $\Leftrightarrow$ 点 A,B,C は、一直線上

（$z=\bar{z}$ ならば z は実数と連動させて解く場合が多い）

平行条件

・$\dfrac{\boldsymbol{\delta-\gamma}}{\boldsymbol{\beta-\alpha}}$ が実数 $\Leftrightarrow AB\ //\ CD$

⑳ 回転移動

・回転の中心が原点のとき
　複素数 $\cos\theta+i\sin\theta$ をかける
・回転の中心が α のとき

β を θ 回転した点が γ の式は、

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\theta+i\sin\theta$$

・点βを回転して（回転の中心αから）r倍の点γ

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

（三角形の形状を調べることが出来る）

21 円の方程式 $|z-\alpha|=r$

$n|z-\alpha|=m|z-\beta|$の表す図形の調べ方

（$m:n=1:1$ のときは直線である）

(1) $z\bar{z}=|z|^2$の利用

(2) $z=x+yi$とおく方法

(3)アポロニウスの円

距離が$m:n$のときなので、２定点を結ぶ線分を$m:n$に内分・外分する点を直径の両端とする円

＜関数と極限＞

① 分数関数

$y=\dfrac{cx+b}{ax+b}$のとき割り算の商と余りを利用して

$y=p+\dfrac{r}{x-q}$と変形できる。このときグラフは、漸近線が、$x=q, y=p$の直角双曲線になる。

② 無理関数

$y=k\sqrt{f(x)}$のグラフは、$y^2=k^2f(x)$のグラフで、

$k>0$のときx軸より上半分。

$k<0$ のときx軸より下半分。

特に、$y=\sqrt{ax+b}$や$y=-\sqrt{ax+b}$は完璧にしておくこと。

③ 合成関数

$f:x\to y$が$y=f(x)$

$g:x\to y$が$y=g(x)$

$f\circ g: x\xrightarrow{g}g(x)\xrightarrow{f}f(g(x))$

この関数は、$f\circ g(x)=f(g(x))$

④ 逆関数

$y=f(x)$が１：１のとき

$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

逆関数を作るには、定義域に注意して

$y=f(x)$をxについて解き$x=f^{-1}(x)$とし、

ここでxとyを入れ替えて$y=f^{-1}(x)$とする。

⑤ 数列の極限

収束：$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ （極限値がα）

発散：$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$ （$+\infty$に発散）

$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$ （$-\infty$に発散）

a_nが振動 （極限値なし）

⑥ 知っているべき数列の極限

(a) $k>0$のとき$\lim_{n\to\infty}n^k=+\infty$ （$+\infty$に発散）

(b) $k<0$のとき$\lim_{n\to\infty}n^k=0$ （極限値０）

(c) $\lim_{n\to\infty}a^n$について、

$a\leq -1$のとき振動

$-1<a<1$のとき$\lim_{n\to\infty}a^n=0$

$a=1$ のとき$\lim_{n\to\infty}a^n=1$

$a>1$のとき$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$

⑦ 数列の極限に関する公式

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$、$\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$のとき

（$n\to\infty$のとき、$a_n\to\alpha, b_n\to\beta$とも書く）

(a) $a_n>b_n\Rightarrow\alpha\geq\beta$

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta$、$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

（$\beta\neq 0$）が成立する。

⑧ 無限等比級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}ar^{k-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

収束・発散について数列の極限と混同しないように注意せよ

収束するのは、$-1<r<1$のときのみで、その和は$\dfrac{a}{1-r}$

$r\geq 1$のとき$a>0$ならば$+\infty$に発散で$a<0$ならば$-\infty$に発散

$r\leq -1$のときは振動（発散）する。

＜関数の極限＞

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ または $x\to a$のとき$f(x)\to\alpha$と表記する。

① $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$、$\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ のとき以下が成立する

$\lim_{x\to a}cf(x)=c\alpha$ （cは定数）

$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$ （複号同順）

$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\alpha\beta$

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$　（$\beta\neq 0$）

②右方極限、左方極限について

$\lim_{x\to a+0}f(x)=\alpha$、$\lim_{x\to a-0}f(x)=\beta$（極限の存在）

特に、$\alpha=\beta$ のとき、$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ と書くことができる

（つまり、右方極限と左方極限の一致する場合である）

③不定形の極限の対処法

$\frac{0}{0}$ 型のときは、分数式ならば約分、無理式は有理化

$\frac{\infty}{\infty}$ 型のときは、分母分子を分母の最高次数で割る

$\infty-\infty$ 型のときは、無理式は有理化、整式は最高次数の項でくくり出す

注）右方極限、左方極限は、$y=f(x)$ のグラフの概形を調べるときにも利用される。（漸近線の存在）

＜三角関数・指数関数・対数関数の極限＞

①$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　（x は、ラジアン角）

②$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\cong 2.718281$　（自然対数の底）

③指数関数・対数関数のグラフからも分かるように

(1) $a>1$ ときは

$\lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty$、$\lim_{x\to-\infty}a^x=0$

$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$、$\lim_{x\to+0}\log_a x=-\infty$

(2) $0<a<1$ のときは

$\lim_{x\to+\infty}a^x=-\infty$、$\lim_{x\to-\infty}a^x=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$、$\lim_{x\to+0}\log_a x=+\infty$

＜関数の連続性＞

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ のとき、すなわち $\lim_{x\to a}f(x)$ が存在し、それが $f(a)$ の値と一致する場合に、この関数は、$x=a$ で連続である

＜中間値の定理＞

閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ は、その区間で $f(a),f(b)$ の間の任意の値をとる。特に $f(a)f(b)<0$ ならば、区間 (a,b) に $f(c)=0$ となる c が、少なくとも１つ存在する。

（方程式の解の存在を示す場合に利用される。）

＜導関数＞

①　$x=a$ における微分係数　$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

②　導関数の定義：$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

＜微分法＞

①　積の微分：$y=f(x)g(x)\Rightarrow y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

②　商の微分：$\boldsymbol{y=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$

③　合成関数の微分：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

$y=f(u)$ で $u=g(x)$ のとき、つまり

$y=f(g(x))\Rightarrow y'=f'(g(x))g'(x)$ である

④　陰関数の微分：$F(x,y)=0$ のとき、y を x の関数とみて両辺を x で微分する。y が x の関数のときは、

$\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx}$ を利用する

⑤　対数微分法：両辺の対数をとり、両辺を x で微分する。

⑥　逆関数の微分：$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}$

⑦　媒介変数表示された関数の微分

$x=f(t)$, $y=g(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

＜高次導関数＞

$f''(x)=\frac{d}{dx}f'(x)$、　$f'''(x)=\frac{d}{dx}f''(x)$

$\frac{d^n}{dx^n}f(x)=f^{(n)}(x)$　（n 階微分）

＜基本的な関数の微分＞

$y=c\Rightarrow y'=0$　（c は定数）

$y=x^n\Rightarrow y'=nx^{n-1}$　（n は実数）

$y=\sin x\Rightarrow y'=\cos x$

$y=\cos x\Rightarrow y'=-\sin x$

$y=\tan x\Rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$y=\log|x|\Rightarrow y'=\frac{1}{x}$

$y=\log_a|x|\Rightarrow y'=\frac{1}{x\log a}$

$y=e^x\Rightarrow y'=e^x$

$y=a^x\Rightarrow y'=a^x\log a$　（$a>0,a\neq 1$）

＜平均値の定理＞

①関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で $f'(x)$ をもてば、$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

となる c が、区間 (a,b) に少なくとも 1 つ存在する。

②表現の仕方を変えると以下の式を満たす θ が存在する。

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$　（$0<\theta<1$）

（極限値を求める問題にも応用される）

＜接線・法線＞

接線：

曲線 $y=f(x)$ 上の $x=a$ における接線の方程式は、

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

法線：

曲線 $y=f(x)$ 上の $x=a$ における法線の方程式は、

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

＜関数のグラフ＞

$y=f(x)$ で、$y'=f'(x)$ を求め $f'(x)$ の符号を調べて関数の増減や極大値・極小値を調べるのは、数学Ⅱと同様だが、$y''=f''(x)$ の符号を調べて、曲線の凹凸や変曲点を調べることができる。変曲点とは、グラフが下に凸から上に凸に変わる点、またはグラフが上に凸から下に凸に変わる点である。通常は、微分可能な点なので、$f''(x)=0$ になる x の値の前後で符号が変わるかを調べることになる。微分可能な点ではないときは、極値と同様に注意を要することになる。

また、漸近線については、$\lim_{x\to a\pm0}f(x)=\pm\infty$ のとき $x=a$

$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ のとき、$y=ax+b$

さらに、グラフの対称性、座標軸との交点、不連続点、存在範囲に注意をして概形を描くことができる。

＜近似式＞

h が十分小さいとき

①1 次の近似式

$$f(a+h)\cong f(a)+f'(a)h$$

$x=a+h$ とすれば、

$$f(x)\cong f(a)+f'(a)(x-a)$$

さらに、x が十分 0 に近ければ

$$f(x)\cong f(0)+f'(0)x$$

特に、近似式　$(1+x)^p=1+px$ は、有名である。

②2 次の近似式

$$f(a+h)\cong f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2$$

③$|\Delta x|$ が十分小さいときは、

$\Delta y=y'\Delta x$ と考えて良い。

＜基本的な不定積分＞

積分定数を C とする

① $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$　（$n\neq -1$）

② $\int \dfrac{1}{x}\,dx=\log|x|+C$

③ $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

④ $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

⑤ $\int e^x dx=e^x+C$

⑥ $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\log a}+C$

＜積分法＞

①　置換積分

$g(x)=t$ とおくと $g'(x)dx=dt$ より

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$$

例：$ax+b=t,\ x^2=t,\ \sqrt{1-x}=t,\ \sin x=t$ 等々

または、$x=g(t)$ とおき $dx=g'(t)dt$

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

例：$x=a\sin t,\ x=\tan t,\ x=at+b$ 等々

注意：定積分のときは、積分範囲が変わるので気をつけること

②　部分積分

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

注意：定積分のときは、求める積分を I とおいて、繰り返し部分積分を使って求める方法がある。

③　式の変形

積和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

その他、三角関数の公式、割り算、有理化、部分分数分解で対応する。

注意：置換積分と変形を組み合わせて、三角関数を有理式に変形する方法もあるが乱用は避けよう。

$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$ で、

$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$　$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　$\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$ を利用で

きる

＜定積分＞

$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = \mathrm{S}$　（S は符号付面積）

$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \dfrac{\pi a^2}{2}$（円の半分の面積）は有名。

＜定積分の基本性質＞

(0) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_b^a f(x)dx$

(1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

(4) $\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx$

(5) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & (f(x):\text{偶関数}) \\ 0 & (f(x):\text{奇関数}) \end{cases}$

(6) $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

余裕があれば、シュワルツの不等式も覚えよう

$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right)$

＜微分と定積分＞

$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$　（数学Ⅱと同じ）

＜区分求積＞

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$　$, x_k = a + k\Delta x$ として、

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

積分を利用して極限値を求めることに利用される。計算を楽にするため以下の式が良く用いられる

$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

＜面積＞

$y = f(x)$ と x 軸に挟まれた部分の面積

$S = \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$

２曲線に囲まれた部分の面積

$S = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx$

＜体積＞

切り口の面積が、$S(x)$ のときは $V = \int_\alpha^\beta S(x)dx$

$V = \pi\int_\alpha^\beta \{f(x)\}^2 dx$　（回転体の体積）

＜曲線の長さ＞（旧々数Ⅲ復活）

① $y = f(x)$ の孤の長さ

$s = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\,dx$

② $x = f(t)$, $y = g(t)$ の孤の長さ（旧々数Ⅲ復活）

$s = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\,dt$

＜速度・加速度・点の位置＞

時刻 t の関数として、点の位置が $s = s(t)$ のとき

$\underset{\text{点の位置}}{s(t)} \xrightarrow{\text{微分}} \underset{\text{速度}}{v(t)} \xrightarrow{\text{微分}} \underset{\text{加速度}}{a(t)}$

計算上は、$s'(t) = v(t), s''(t) = a(t)$

逆に考えて、$\underset{\text{加速度}}{a(t)} \xrightarrow{\text{積分}} \underset{\text{速度}}{v(t)} \xrightarrow{\text{積分}} \underset{\text{点の位置}}{s(t)}$

計算上は、$s(t) = \int_a^t v(t)dt + s(a)$ 、$v(t) = \int_a^t a(t)dt + v(a)$

注）平面運動のときは、ベクトルとして扱う。

速度ベクトル $\boldsymbol{\vec{v} = (v_x(t), v_y(t))}$

加速度ベクトル $\boldsymbol{\vec{a} = (a_x(t), a_y(t))}$

注）速さはベクトルの大きさ $|\vec{v}|$ である。

＜道のり＞（旧々数Ⅲ復活）

$l = \int_a^t |v(t)|dt$

＜微分方程式＞（旧数Ⅲの内容入試用）

① 変数分離形 $\boldsymbol{f(y)dy = g(x)dx}$ と変形して、両辺を積分して解く $\boldsymbol{\int f(y)dy = \int g(x)dx}$

② 同次型の場合 $y = ux$ とおくと、変数分離形に帰着される $\boldsymbol{f(u)du = g(x)dx}$

③ $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = ky}$ の一般解は $\boldsymbol{y = Ce^{kx}}$（$\boldsymbol{C}$ は任意定数）

＜２次曲線＞（旧数 C→数Ⅲ）

e を離心率とする

① 円：$x^2 + y^2 = r^2$　焦点 $(0,0)$　準線なし

② 楕円：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　焦点 $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$　準線 $x = \pm\dfrac{a}{e}$

③ 双曲線：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　焦点 $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$　準線 $x = \pm\dfrac{a}{e}$

④ 放物線：$y^2 = 4px$　焦点 $(p,0)$　準線 $x = -p$

注意：楕円での $a > b > 0$ と $b > a > 0$ の違い。双曲線での $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$、放物線 $x^2 = 4py$ も、焦点、準線、どのような図形になるかを押さえておくこと。

＜２次曲線の接線＞（旧数 C→数Ⅲ）

接点(x_1, y_1)のとき

①円：$x^2+y^2=r^2$→接線　$x_1x+y_1y=r^2$

②楕円：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　→接線　$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

③双曲線：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　→接線　$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

④放物線：$y^2=4px$　→接線　$y_1y=2p(x+x_1)$

接線の作り方を統一して覚えておこう。

＜２次曲線の平行移動＞（旧数 C→数Ⅲ）

x軸方向にx_1、軸方向にy_1平行移動する

$F(x,y)=0 \to F(x-x_1, y-y_1)=0$

＜離心率での２次曲線の分類Ⅰ＞

定点 F と定直線 g からの距離の比が$e:1$と、一定である点 P の軌跡は、①$0<e<1$のとき楕円　離心率$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

②$e=1$のとき放物線　離心率$e=1$

③$e>1$のとき双曲線　離心率$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

[④$e=0$のとき円]

定点 F と定直線 g に下ろした垂線の足を H とする。$e=\dfrac{PF}{PH}$を離心率という

注）焦点 F、準線 g である

＜離心率での２次曲線の分類Ⅱ＞

曲方程式の表す曲線

$\boldsymbol{r(1+e\cos\theta)=l}$　$(\boldsymbol{l}>0)$で、

① $0<e<1$のとき楕円
② $e=1$のとき放物線
③ $e>1$のとき双曲線
[④$e=0$のとき円]

＜媒介変数表示＞（旧数 C→数Ⅲ）

④ 円：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

⑤ 楕円：$x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$

⑥ 双曲線：$x=\dfrac{a}{\cos\theta}, y=b\tan\theta$

⑦ サイクロイド：$x=a(\theta-\sin\theta), y=a(1-\cos\theta)$

＜極座標と極方程式＞（旧数 C→数Ⅲ）

直交座標(x,y)と極座標(r,θ)の関係

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$　$x^2+y^2=r^2$

特に、極方程式$r=f(\theta)$で表される曲線は、

$x=f(\theta)\cos\theta, y=f(\theta)\sin\theta$である。

良くある曲方程式

① 中心(r_0,θ_0)、半径aの円：$r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)=a^2$

注）左辺は、２点(r,θ) (r_0,θ_0)間の距離を表す

② 極 O を通り、始線 OX となす角がαである直線：$\theta=\alpha$

③ 点$A(a,\alpha)$を通り、OA に垂直な直線：$r\cos(\theta-\alpha)=a$

$(a>0)$

＜色々な曲線＞（旧数 C→数Ⅲ）

① カージオイド（心臓形）：$r=a(1+\cos\theta)$

② アルキメデスの渦巻き線：$r=a\theta$
③ 正葉曲線：$r=\sin a\theta$
④ リマソン（蝸牛線）：$r=a+b\cos\theta$

⑤ レムニスケート：　$r^2=2a^2\cos 2\theta$