数学Ⅲ・C　公式集

＜関数と極限＞

① 分数関数

$y=\dfrac{cx+b}{ax+b}$ のとき割り算の商と余りを利用して

$y=p+\dfrac{r}{x-q}$ と変形できる。このときグラフは、漸近線が、

$x=q\,,y=p$ の直角双曲線になる。

② 無理関数

$y=k\sqrt{f(x)}$ のグラフは、$y^2=k^2f(x)$ のグラフで、

$k>0$ のとき x 軸より上半分。
$k<0$ のとき x 軸より下半分。

特に、$y=\sqrt{ax+b}$ や $y=-\sqrt{ax+b}$ は完璧にしておくこと。

③ 合成関数

$f:x\to y$ が $y=f(x)$

$g:x\to y$ が $y=g(x)$

$f\circ g:x\xrightarrow{g}g(x)\xrightarrow{f}f(g(x))$

この関数は、$f\circ g(x)=f(g(x))$

④ 逆関数

$y=f(x)$ が１：１のとき

$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

逆関数を作るには、定義域に注意して

$y=f(x)$ を x について解き $x=f^{-1}(x)$ とし、

ここで x と y を入れ替えて $y=f^{-1}(x)$ とする。

⑤ 数列の極限

収束：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$　（極限値が α ）

発散：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$　（$+\infty$ に発散）

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$　（$-\infty$ に発散）

a_n が振動　（極限値なし）

⑥ 知っているべき数列の極限

(a) $k>0$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty}n^k=+\infty$　（$+\infty$ に発散）

(b) $k<0$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty}n^k=0$　（極限値０）

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}r^n$ について、

$r\leq-1$ のとき振動

$-1<r<1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$

$r=1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=1$

$r>1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=+\infty$

⑦ 数列の極限に関する公式

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 、$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$ のとき

（$n\to\infty$ のとき、$a_n\to\alpha\,,b_n\to\beta$ とも書く）

(a) $a_n>b_n\Rightarrow\alpha\geq\beta$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta$ 、$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$ 、$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

（$\beta\neq0$）が成立する。

⑧ 無限等比級数

$$\sum_{k=1}^{\infty}ar^{k-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

収束・発散について数列の極限と混同しないように注意せよ

収束するのは、$-1<r<1$ のときのみで、その和は $\dfrac{a}{1-r}$

$r\geq1$ のとき $a>0$ ならば $+\infty$ に発散で $a<0$ ならば $-\infty$ に発散
$r\leq-1$ のときは振動（発散）する。

＜関数の極限＞

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$　または　$x\to a$ のとき $f(x)\to\alpha$ と表記する。

①$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$ 、$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\beta$　のとき以下が成立する

$\lim\limits_{x\to a}cf(x)=c\alpha$　（c は定数）

$\lim\limits_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$　（複号同順）

$\lim\limits_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\alpha\beta$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　（$\beta\neq0$）

②右方極限、左方極限について

$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\alpha$ 、$\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\beta$（極限の存在）

特に、$\alpha=\beta$ のとき、$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\alpha$ と書くことができる

（つまり、右方極限と左方極限の一致する場合である）

③不定形の極限の対処法

a. $\dfrac{0}{0}$ 型のときは、分数式ならば約分、無理式は有理化

b. $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型のときは、分母分子を分母の最高次数で割る

c. $\infty-\infty$ 型のときは、無理式は有理化、整式は最高次数の項でくくり出す

d. $\infty\times0$ は、a.と c.と同様

注）右方極限、左方極限は、$y=f(x)$ のグラフの概形を調べるときにも利用される。（漸近線の存在）

＜三角関数・指数関数・対数関数の極限＞

①$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　（xは、ラジアン角）

② $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\cong 2.718281$　（自然対数の底）

③指数関数・対数関数のグラフからも分かるように

(1) $a>1$ときは

$\lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty$、$\lim_{x\to-\infty}a^x=0$

$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$、$\lim_{x\to+0}\log_a x=-\infty$

(2) $0<a<1$のときは

$\lim_{x\to+\infty}a^x=-\infty$、$\lim_{x\to-\infty}a^x=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$、$\lim_{x\to+0}\log_a x=+\infty$

＜関数の連続性＞

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$のとき、すなわち$\lim_{x\to a}f(x)$が存在し、それが$f(a)$の値と一致する場合に、この関数は、$x=a$で連続である

＜中間値の定理＞

閉区間$[a,b]$で連続な関数$f(x)$は、その区間で$f(a),f(b)$の間の任意の値をとる。特に$f(a)f(b)<0$ならば、区間(a,b)に$f(c)=0$となるcが、少なくとも１つ存在する。

（方程式の解の存在を示す場合に利用される。）

＜導関数＞

①　$x=a$における微分係数　$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

②　導関数の定義：$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

＜微分法＞

①　積の微分：$y=f(x)g(x)\Rightarrow y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

②　商の微分：$\boldsymbol{y=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$

③　合成関数の微分：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

$y=f(u)$で$u=g(x)$のとき、つまり

$y=f(g(x))\Rightarrow y'=f'(g(x))g'(x)$である

④　陰関数の微分：$F(x,y)=0$のとき、yをxの関数とみて両辺をxで微分する。yがxの関数のときは、

$\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx}$を利用する

⑤　対数微分法：両辺の対数をとり、両辺をxで微分する。

⑥　逆関数の微分：$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}$

⑦　媒介変数表示された関数の微分

$x=f(t)$, $y=g(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

＜高次導関数＞

$f''(x)=\frac{d}{dx}f'(x)$、　$f'''(x)=\frac{d}{dx}f''(x)$

$\frac{d^n}{dx^n}f(x)=f^{(n)}(x)$　（n階微分）

＜基本的な関数の微分＞

$y=c\Rightarrow y'=0$　（cは定数）

$y=x^n\Rightarrow y'=nx^{n-1}$　（nは実数）

$y=\sin x\Rightarrow y'=\cos x$

$y=\cos x\Rightarrow y'=-\sin x$

$y=\tan x\Rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$y=\log|x|\Rightarrow y'=\frac{1}{x}$

$y=\log_a|x|\Rightarrow y'=\frac{1}{x\log a}$

$y=e^x\Rightarrow y'=e^x$

$y=a^x\Rightarrow y'=a^x\log a$　（$a>0,a\neq 1$）

＜平均値の定理＞

①関数$f(x)$が区間$[a,b]$で$f'(x)$をもてば、$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

となるcが、区間(a,b)に少なくとも１つ存在する。

②表現の仕方を変えると以下の式を満たすθが存在する。

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$　（$0<\theta<1$）

（極限値を求める問題にも応用される）

＜接線・法線＞

接線：

曲線$y=f(x)$上の$x=a$における接線の方程式は、

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

法線：

曲線 $y=f(x)$ 上の $x=a$ における法線の方程式は、

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

＜関数のグラフ＞

$y=f(x)$ で、 $y'=f'(x)$ を求め $f'(x)$ の符号を調べて関数の増減や極大値・極小値を調べるのは、数学Ⅱと同様だが、$y''=f''(x)$ の符号を調べて、曲線の凹凸や変曲点を調べることができる。変曲点とは、グラフが下に凸から上に凸に変わる点、またはグラフが上に凸から下に凸に変わる点である。通常は、微分可能な点なので、$f''(x)=0$ になる x の値の前後で符号が変わるかを調べることになる。微分可能な点ではないときは、極値と同様に注意を要することになる。

また、漸近線については、 $\lim_{x\to a\pm 0} f(x)=\pm\infty$ のとき $x=a$

$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$ のとき、 $y=ax+b$

さらに、グラフの対称性、座標軸との交点、不連続点、存在範囲に注意をして概形を描くことができる。

＜近似式＞

h が十分小さいとき

①1 次の近似式

$$f(a+h)\cong f(a)+f'(a)h$$

$x=a+h$ とすれば、

$$f(x)\cong f(a)+f'(a)(x-a)$$

さらに、x が十分 0 に近ければ

$$f(x)\cong f(0)+f'(0)x$$

特に、近似式　$(1+x)^p=1+px$ は、有名である。

②2 次の近似式

$$f(a+h)\cong f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2$$

③$|\Delta x|$ が十分小さいときは、

$\Delta y=y'\Delta x$ と考えて良い。

＜基本的な不定積分＞

積分定数を C とする

① $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ （$n\neq -1$）

② $\int \frac{1}{x}\,dx=\log|x|+C$

③ $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

④ $\int \cos x dx=\sin x+C$

⑤ $\int e^x dx=e^x+C$

⑥ $\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$

＜積分法＞

①　置換積分

$g(x)=t$ とおくと $g'(x)dx=dt$ より

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$$

例： $ax+b=t,\ x^2=t,\ \sqrt{1-x}=t,\ \sin x=t$ 等々

または、 $x=g(t)$ とおき $dx=g'(t)dt$

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

例： $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)|+C$

例： $x=a\sin t,\ x=\tan t, x=at+b$ 等々

注意：定積分のときは、積分範囲が変わるので気をつけること

②　部分積分

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

注意：定積分のときは、求める積分を I とおいて、繰り返し部分積分を使って求める方法がある。

③　式の変形

積和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

その他、三角関数の公式、割り算、有理化、部分分数分解で対応する。

注意：置換積分と変形を組み合わせて、三角関数を有理式に変形する方法もあるが乱用は避けよう。

$\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$ で、

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$　　$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$　　$\tan x=\frac{2t}{1-t^2}$ を利用できる

＜定積分＞

$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=\mathrm{S}$　（S は符号付面積）

$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{\pi a^2}{2}$ （円の半分の面積）は有名。

＜定積分の基本性質＞

(0) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_b^a f(x)dx$

(1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

(4) $\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx$

(5) $\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & (f(x):\text{偶関数}) \\ 0 & (f(x):\text{奇関数}) \end{cases}$

(6) $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

余裕があれば、シュワルツの不等式も覚えよう

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right)$$

＜微分と定積分＞

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$ （数学Ⅱと同じ）

＜区分求積＞

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$,$x_k = a + k\Delta x$ として、

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

積分を利用して極限値を求めることに利用される。計算を楽にするため以下の式が良く用いられる

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

＜面積＞

$y = f(x)$ と x 軸に挟まれた部分の面積

$$S = \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

２曲線に囲まれた部分の面積

$$S = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx$$

＜体積＞

切り口の面積が、$S(x)$ のときは $V = \int_\alpha^\beta S(x)dx$

$$V = \pi\int_\alpha^\beta \{f(x)\}^2 dx$$ （回転体の体積）

＜曲線の長さ＞

① $y = f(x)$ の孤の長さ

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}dx$$

② $x = f(t)$, $y = g(t)$ の孤の長さ

$$s = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}dt$$ n

＜速度・加速度・点の位置＞

時刻 t の関数として、点の位置が $s = s(t)$ のとき

$$\underset{\text{点の位置}}{s(t)} \xrightarrow{\text{微分}} \underset{\text{速度}}{v(t)} \xrightarrow{\text{微分}} \underset{\text{加速度}}{a(t)}$$

計算上は、$s'(t) = v(t), s''(t) = a(t)$

逆に考えて、$\underset{\text{加速度}}{a(t)} \xrightarrow{\text{積分}} \underset{\text{速度}}{v(t)} \xrightarrow{\text{積分}} \underset{\text{点の位置}}{s(t)}$

計算上は、$s(t) = \int_a^t v(t)dt + s(a)$ 、$v(t) = \int_a^t a(t)dt + v(a)$

注）平面運動のときは、ベクトルとして扱う。

速度ベクトル $\vec{v} = (v_x(t), v_y(t))$

加速度ベクトル $\vec{a} = (a_x(t), a_y(t))$

注）速さはベクトルの大きさ $|\vec{v}|$ である。

＜道のり＞

$$l = \int_a^t |v(t)|dt$$

＜行列＞

ベクトルの拡張で、各成分を縦横に並べたものである。

x_{ij} ：i 行 j 列目にある成分

＜行列の演算＞

和、差、実数倍に関しては、各 i 行 j 列目にある成分で、和、差、実数倍をすれば良い。したがって、i 行 j 列の型が同じ（i×j 型同士）でないと演算は不可である。掛け算については、i×j 型と j×k 型が演算可能で、計算結果は i×k 型となる。
特に、次の形の場合が多い。

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

n 個の行列 A を掛けたものは、$AAA\cdots AA = A^n$ と書く。

また、一般には、$AB \neq BA$ で、交換法則は不成立である。

実数の掛け算での１と同様に、単位行列 E が存在し、左から掛けても右から掛けても変わらない。$EA = AE = A$ である。

２×２型のときの単位行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

また、全ての成分が 0 の行列を零行列と呼び、零行列 0 については、実数の 0 と同様に $AO = OA = O$

ただし、$A \neq O, B \neq O$ であっても $AB = O$ となることがある。

（つまり、実数とは違い、零因子の存在に注意する。）

２×２型のときの零行列は、$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

割り算については、実数で逆数を掛けることにより計算するのと同様に、逆行列 A^{-1} を掛けることにより演算を行う。

逆行列とは、掛けたときに単位行列 E になる行列であり、これは

実数で、掛けて１になる数を逆数と呼ぶのと同じである。

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$

特に、２×２型のときの逆行列は、

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

ただし、$\Delta=ad-cb\neq 0$
もし、$\Delta=ad-cb=0$ならば逆行列は存在しない。
（実数０に逆数が存在しないのと同様である。）

n個の行列Aを掛けたものは、$AAA\cdots AA=A^n$と書く。

＜ケーリー・ハミルトンの公式＞

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$のとき、

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$が成立する。

これは、A^nの次数を下げて計算する場合に良く使われる。

＜逆行列の利用＞

A^{-1} が存在するならば、一次方程式と同様に、

$AX=B\rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\rightarrow EX=A^{-1}B\rightarrow X=A^{-1}B$

または

$XA=B\rightarrow XAA^{-1}=BA^{-1}\rightarrow XE=BA^{-1}\rightarrow X=BA^{-1}$

と変形ができる。
上記のことを利用すれば、連立２元１次方程式

$\begin{cases}ax+by=p\\ cx+dy=q\end{cases}$ p

を行列を用いて解くことができる。

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$　$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$　とおけば

連立２元１次方程式は、$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$、つまり

$AX=B\rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\rightarrow EX=A^{-1}B\rightarrow X=A^{-1}B$

だから、$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$を計算すれば良い。

＜行列の基本変形＞
①二つの行を入れ替える
②ある行に０でない実数を掛ける
③ある行に他の行の実数倍を加える

注）連立２元１次方程式は行列の基本変形で消去法を用いても求めることができる。

$AX=B\rightarrow A,B$を基本変形して$EX=Q$の形にすれば

解は$X=Q$

＜２次曲線＞

eを離心率とする

① 円：$x^2+y^2=r^2$　焦点$(0,0)$　準線なし

② 楕円：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　焦点$(\pm\sqrt{a^2-b^2},0)$　準線$x=\pm\dfrac{a}{e}$

③ 双曲線：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　焦点$(\pm\sqrt{a^2+b^2},0)$　準線$x=\pm\dfrac{a}{e}$

④ 放物線：$y^2=4px$　焦点$(p,0)$　準線$x=-p$

注意：楕円での$a>b>0$と$b>a>0$の違い。双曲線での$\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$、放物線$x^2=4py$も、焦点、準線、どのような図形になるかを押さえておくこと。

＜２次曲線の接線＞

接点(x_1,y_1)のとき

①円：$x^2+y^2=r^2$→接線　$x_1x+y_1y=r^2$

②楕円：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　→接線　$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

③双曲線：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　→接線　$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

④放物線：$y^2=4px$　→接線　$y_1y=2p(x+x_1)$

接線の作り方を統一して覚えておこう。

＜２次曲線の平行移動＞

x軸方向にx_1、軸方向にy_1平行移動する

$F(x,y)=0\rightarrow F(x-x_1,y-y_1)=0$

＜離心率＞

定点 F と定直線 g からの距離の比が$e:1$と、一定である点 P の軌跡は、①$0<e<1$のとき楕円　離心率$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

②$e=1$のとき放物線　離心率$e=1$

③$e>1$のとき双曲線　離心率$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

[④$e=0$のとき円]

定点 F と定直線 g に下ろした垂線の足をHとする。$e=\dfrac{PF}{PH}$を離心率という

注）焦点 F、準線 g である

＜媒介変数表示＞

① 円：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$

② 楕円：$x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$

③ 双曲線：$x=\dfrac{a}{\cos\theta}, y=b\tan\theta$

④ サイクロイド：$x=a(\theta-\sin\theta), y=a(1-\cos\theta)$

放物線：$y^2 = 4px$ ＜曲座標と曲方程式＞

直交座標 (x, y) と曲座標 (r, θ) の関係

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \quad x^2 + y^2 = r^2$

特に、曲方程式 $r = f(\theta)$ で表される曲線は、

$x = f(\theta)\cos\theta, y = f(\theta)\sin\theta$ である。

良くある曲方程式

① 中心 (r_0, θ_0)、半径 a の円：$r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) = a^2$

注）左辺は、２点 (r, θ) (r_0, θ_0) 間の距離を表す

② 極 O を通り、始線 OX となす角が α である直線：$\theta = \alpha$

③ 点 $A(a, \alpha)$ を通り、OA に垂直な直線：$r\cos(\theta - \alpha) = a$

$(a > 0)$

＜色々な曲線＞

① カージオイド（心臓形）：$r = a(1 + \cos\theta)$

② アルキメデスの渦巻き線：$r = a\theta$

③ 正葉曲線：$r = \sin a\theta$

④ リマソン（蝸牛線）：$r = a + b\cos\theta$

⑤ レムニスケート：　$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$