＜一つの問題に解法がナント１５通り＞

X^2+Y^2 が一定値のとき、XY または $X+Y$ の最大値を求める問題を考えてみる。

Ex.. １　$X^2+Y^2=5$ のとき、XY の最大値を求めよ。

Ex.. ２　$X^2+Y^2=5$ のとき、$X+Y$ の最大値を求めよ。

また、Ex.. ２の問題で $X=\sqrt{2x}$ 、$Y=\sqrt{3y}$ とおいたもので、次の形にしたものも良くあります。

Ex.. ３　$2x+3y=5$ のとき、$\sqrt{6xy}$ の最大値を求めよ。（普通は $\sqrt{xy}$ の最大値でしょう）

Ex.. ４　$2x+3y=5$ のとき、$\sqrt{2x}+\sqrt{3y}$ の最大値を求めよ。

そこで、一般化して以下の問題を考えてみよう。

> 問：$ax+by=k$ のとき、$\sqrt{ax}+\sqrt{by}$ の最大値を求めよ。
> 　　ただし、$a>0,b>0,x>0,y>0$ とする。

＜解１＞数学Ⅰ：２次関数の利用

$p=\sqrt{ax}+\sqrt{by}$ とおき、両辺を２乗すると、$p^2=ax+by+2\sqrt{abxy}$ ・・・☆

まず、p^2 の最大値を求める。

$ax+by=k$ から、$y=\dfrac{k-ax}{b}$ を☆式に代入し、$p^2=ax+by+2\sqrt{ax(k-ax)}$

$$=k+2\sqrt{ax(k-ax)}=k+2\sqrt{-a^2x^2+akx}=k+2\sqrt{-a^2\left(x-\frac{k}{2a}\right)^2+\frac{k^2}{4}}$$

したがって、$x=\dfrac{k}{2a}$ のとき p^2 は最大で、その最大値は、$k+2\sqrt{\dfrac{k^2}{4}}=2k$

$ax+by=k$ に $x=\dfrac{k}{2a}$ を代入して $y=\dfrac{k}{2b}$ を得る。

よって、$x=\dfrac{k}{2a}$，$y=\dfrac{k}{2b}$ のとき p の最大値は $\sqrt{2k}$

＜解２＞数学Ⅱ：相加平均・相乗平均の関係の利用

$p=\sqrt{ax}+\sqrt{by}$ とおき、両辺を２乗すると、 $p^2=ax+by+2\sqrt{abxy}$ ・・・☆

まず、 p^2 の最大値を求める。

$ax>0, by>0$ なので、相加平均・相乗平均の関係から $\sqrt{ax\cdot bx}\leq\frac{ax+bx}{2}$

ここで、 $ax+by=k$ なので、 $\sqrt{abxy}\leq\frac{k}{2}$ で、☆式は、

$p^2=k+2\sqrt{abxy}\leq k+k=2k$ 　だから p^2 の最大値は $2k$

等号が成立するのは、 $ax=by$ のときなので、 $ax+by=k$ と連立させて、

$x=\frac{k}{2a}$， $y=\frac{k}{2b}$ のときとなる。

よって、 $x=\frac{k}{2a}$， $y=\frac{k}{2b}$ のとき p の最大値は $\sqrt{2k}$

＜解３＞数学Ⅰ：２次関数の利用

２数 X, Y の和が一定のとき、積 XY が最大となるのは、 $X=Y$ のときである。

なぜならば、 $X+Y=c$ のとき $XY=X(c-X)=-\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+\frac{c^2}{4}$ となり

$X=Y=\frac{c}{2}$ のとき、最大となるからである。

$p=\sqrt{ax}+\sqrt{by}$ とおき、両辺を２乗すると、 $p^2=ax+by+2\sqrt{abxy}$ ・・・☆

まず、 p^2 の最大値を求める。和 $ax+by=k$ が一定だから、 $ax=by$ のとき $abxy$ が最大となる。

したがって、 $x=\frac{k}{2a}$， $y=\frac{k}{2b}$ のとき、 p^2 は最大で、その最大値は、 $k+2\sqrt{\frac{k^2}{4}}=2k$

よって、 $x=\frac{k}{2a}$， $y=\frac{k}{2b}$ のとき p の最大値は $\sqrt{2k}$

＜解３の別解＞数学Ｉ：対称式の利用

$(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$ から $XY = \dfrac{(X+Y)^2 - (X^2+Y^2)}{2}$ ・・・①

$(X-Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2$ から、$XY = \dfrac{X^2+Y^2-(X-Y)^2}{2}$ ・・・②

$X^2 + Y^2 = k$ （一定値）のときは、①から，$XY = \dfrac{(X+Y)^2 - k}{2}$ なので、

XY が最大になるときと $X+Y$ が最大になるときは一致している。

②から $X^2 + Y^2 = k$ （一定値）のときは、$XY = \dfrac{k-(X-Y)^2}{2}$ なので、

積 XY や和 $X+Y$ が最大となるのは、$X = Y$ のときである。

$X + Y = \sqrt{ax} + \sqrt{by}$ とおき、$X+Y$ が最大になるのは、$X = Y$ のときである。

$\sqrt{ax} = \sqrt{by}$ から $ax = by$ と $ax+by=k$ から、連立させて、

$x = \dfrac{k}{2a}$，$y = \dfrac{k}{2b}$ のとき最大で、その最大値は、$X + Y = \sqrt{\dfrac{k}{2}} + \sqrt{\dfrac{k}{2}} = 2\times\sqrt{\dfrac{k}{2}} = \dfrac{2\sqrt{2k}}{2} = \sqrt{2k}$

よって、$x = \dfrac{k}{2a}$，$y = \dfrac{k}{2b}$ のとき p の最大値は $\sqrt{2k}$

＜解４＞数学II：コーシー・シュワルツの不等式を利用

a,b,c,d が実数のとき、有名な絶対不等式

$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqq (ac+bd)^2$ が成り立つ（等号は $ad = bc$ で成立）

ここで、$a=1, b=1, c=\sqrt{ax}, d=\sqrt{by}$ とし $p = \sqrt{ax} + \sqrt{by}$ とおけば、$p > 0$ で、

$(1^2+1^2)(ax+by) \geqq (\sqrt{ax}+\sqrt{by})^2$ から、$2\times k \geq p^2 \therefore 0 < p \leq \sqrt{2k}$

等号が成り立つのは、$1\times\sqrt{ax} = 1\times\sqrt{by}$ つまり $ax = by$ のときなので、$ax+by=k$ と連立させて、

$x = \dfrac{k}{2a}$，$y = \dfrac{k}{2b}$ のときとなる。よって、$x = \dfrac{k}{2a}$，$y = \dfrac{k}{2b}$ のとき p の最大値は $\sqrt{2k}$

＜解５＞数学Ｂ：ベクトルの内積の利用

$\vec{p}=(\sqrt{ax},\sqrt{by})$，$\vec{q}=(1,1)$ とすれば、$p=\sqrt{ax}+\sqrt{by}$ とおき

内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}=\sqrt{ax}\times 1+\sqrt{by}\times 1=\sqrt{ax}+\sqrt{by}=p$ ・・・①

$\vec{p}$ と $\vec{q}$ の、なす角を θ とすれば、

内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta=\sqrt{ax+by}\cdot\sqrt{1^2+1^2}\cos\theta=\sqrt{2k}\cos\theta$ ・・・②

①②より $p=\sqrt{2k}\cos\theta$ となり、p は、$\theta=0$ のとき、最大で最大値 $\sqrt{2k}$

このとき $\vec{p}$ と $\vec{q}$ の、なす角が $\theta=0$ より $\vec{p}$ と $\vec{q}$ は同じ向きだから、$\vec{p}=t\vec{q}$ （t ：実数）

$(\sqrt{ax},\sqrt{by})=t(1,1)=(t,t)$ より、$\sqrt{ax}=\sqrt{by}$ つまり $ax=by$ のときなので、$ax+by=k$ と

連立させて、$x=\dfrac{k}{2a}$，$y=\dfrac{k}{2b}$ のときとなる。

よって、$x=\dfrac{k}{2a}$，$y=\dfrac{k}{2b}$ のとき p の最大値は $\sqrt{2k}$

＜解６＞数学Ⅲ：媒介変数表示の利用

$X=\sqrt{ax}$ 、$Y=\sqrt{by}$ とおくと、与式は、$X^2+Y^2=k$ なので、原点を中心で、半径 $\sqrt{k}$ の円

媒介変数 θ を用いて、X,Y は、それぞれ $\begin{cases} X=\sqrt{k}\cos\theta \\ Y=\sqrt{k}\sin\theta \end{cases}$ ・・・①

したがって、$\sqrt{ax}+\sqrt{by}=X+Y=\sqrt{k}\cos\theta+\sqrt{k}\sin\theta=\sqrt{k}(\sin\theta+\cos\theta)=\sqrt{2k}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大で、最大値は $\sqrt{2k}$

①から $X=Y=\sqrt{\dfrac{k}{2}}=\dfrac{\sqrt{2k}}{2}$ なので、$X=\sqrt{2x}$ 、$Y=\sqrt{3y}$ に戻し

$x=\dfrac{k}{2a}$，$y=\dfrac{k}{2b}$ のときとなる。よって、$x=\dfrac{k}{2a}$，$y=\dfrac{k}{2b}$ のとき、最大値は $\sqrt{2k}$

＜解７＞数学Ⅲ：合成関数の微分法の利用

$f(x)=\sqrt{ax}+\sqrt{by}$ とおき、この関数の最大値を求める。

$ax+by=k$ から、 $f(x)=\sqrt{ax}+\sqrt{k-ak}\ =(ax)^{\frac{1}{2}}+(k-ax)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(ax)^{-\frac{1}{2}}\times a+\frac{1}{2}(k-ax)^{-\frac{1}{2}}\times(-a)=\frac{a\left(\sqrt{k-ax}-\sqrt{ax}\right)}{2\sqrt{ax}\sqrt{k-ax}}\quad=\frac{a(k-2ax)}{2\sqrt{ax}\sqrt{k-ax}\left(\sqrt{k-ax}+\sqrt{ax}\right)}$$

x	0	・・・	$\frac{k}{2a}$	・・・	$\frac{k}{a}$
$f'(x)$		＋	0	―	
$f(x)$	$\sqrt{k}$	↗	$\sqrt{2k}$	↘	$\sqrt{k}$

$ax+by=k$ に $x=\dfrac{k}{2a}$ を代入して $y=\dfrac{k}{2b}$ を得る。

$x=\dfrac{k}{2a}$， $y=\dfrac{k}{2b}$ のとき、最大値は $\sqrt{2k}$

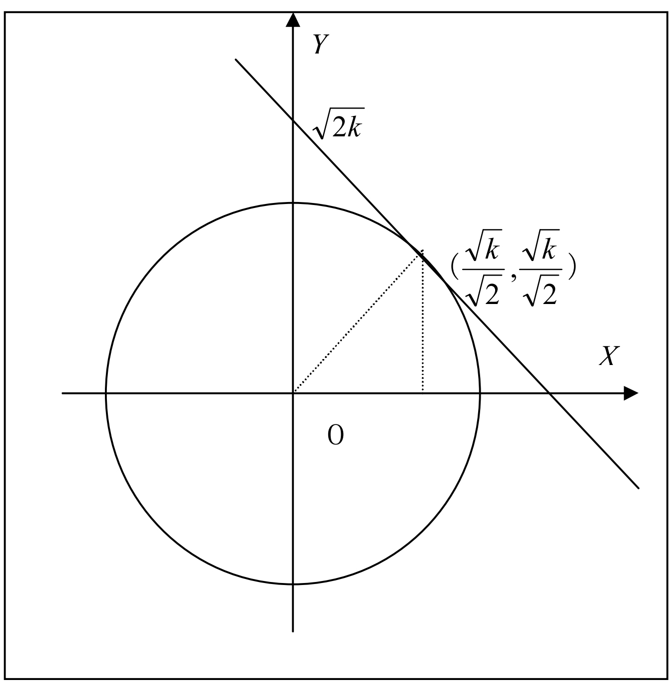
＜解８＞数学Ⅱ：図形と方程式（線型計画法の利用）

$X=\sqrt{ax}$ 、$Y=\sqrt{by}$ とおくと、$X>0\,,Y>0$ で、与式は、 $X^2+Y^2=k$ なので

原点を中心にした、半径 $\sqrt{k}$ の円の第１象限の部分である。

$\sqrt{ax}+\sqrt{by}=X+Y=p$ とおく、第１象限の円周上の点で、直線 $Y=-X+p$ の Y 切片が

最大になるときなので、この円と直線が接する場合である。直角二等辺三角形の辺の比を用いて



左図から、接点は $\left(\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}},\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\right)$

このとき Y 切片 $p=\sqrt{2k}$

$X=\sqrt{ax}\ =\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$ から $x=\dfrac{k}{2a}$

$Y=\sqrt{by}\ =\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$ から $y=\dfrac{k}{2b}$

よって、$x=\dfrac{k}{2a}$， $y=\dfrac{k}{2b}$ のとき、最大値は $\sqrt{2k}$

＜解８の別解１＞数学Ⅱ：図形と方程式（線型計画法の利用：点と直線の距離）

$X=\sqrt{ax}$ 、$Y=\sqrt{by}$ とおくと、$X>0\,,Y>0$ で、与式は、$X^2+Y^2=k$ なので

原点を中心にした、半径$\sqrt{k}$ の円の第１象限の部分である。

$\sqrt{ax}+\sqrt{by}=X+Y=p$ とおく、第１象限の円周上の点で、直線$Y=-X+p$ のY 切片が

最大になるときなので、この円と直線が接する場合である。

原点から直線$X+Y-p=0$ との距離が半径$\sqrt{k}$ と等しいので、

$\dfrac{|0+0-p|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{k}$ なので、$p=\sqrt{2k}$ のとき最大

接点の座標は、$X+Y=\sqrt{2k}$ と$X^2+Y^2=k$ を連立させて解いて

$X=\sqrt{ax}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$ から$x=\dfrac{k}{2a}$、$Y=\sqrt{by}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$ から$y=\dfrac{k}{2b}$

よって、$x=\dfrac{k}{2a}$，$y=\dfrac{k}{2b}$ のとき、最大値は$\sqrt{2k}$

＜解８の別解２＞数学Ⅱ：図形と方程式（線型計画法の利用：判別式）

$X=\sqrt{ax}$ 、$Y=\sqrt{by}$ とおくと、$X>0\,,Y>0$ で、与式は、$X^2+Y^2=k$ なので

原点を中心にした、半径$\sqrt{k}$ の円の第１象限の部分である。

$\sqrt{ax}+\sqrt{by}=X+Y=p$ とおく、第１象限の円周上の点で、直線$Y=-X+p$ のY 切片が

最大になるときなので、この円と直線が接する場合である。

$X+Y=p$ と$X^2+Y^2=k$ を連立させて、方程式$2X^2-2pX+p^2-k=0$ が重解をもつので、

判別式$D/4=p^2-2\times(p^2-k)=2k-p^2\geq 0$ と$p>0$ から$0<p\leq\sqrt{2k}$

$p=\sqrt{2k}$ のとき最大

接点の座標は、$X+Y=\sqrt{2k}$ と$X^2+Y^2=k$ を連立させて解いて

$X=\sqrt{ax}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$ から$x=\dfrac{k}{2a}$、$Y=\sqrt{by}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$ から$y=\dfrac{k}{2b}$

よって、$x=\dfrac{k}{2a}$，$y=\dfrac{k}{2b}$ のとき、最大値は$\sqrt{2k}$

＜解９＞数学Ⅰ：２次方程式の理論（解の配置問題：解の和と積の利用）

$X=\sqrt{ax}$ 、$Y=\sqrt{by}$ とおくと、$X^2+Y^2=k$ ・・・①　$X+Y=p$ ・・・②となる。

②の両辺を２乗して、$X^2+2XY+Y^2=p^2$　①を代入して整理すると $XY=\dfrac{p^2-k}{2}$ ・・・③

②③から、この X, Y は、２次方程式 $t^2-pt+\dfrac{p^2-k}{2}=0$ の２解である。

$X>0, Y>0$ なる解をもつ条件は、判別式 $D=p^2-4\times\dfrac{p^2-k}{2}\geq 0$ かつ和 $X+Y=p>0$

かつ積 $XY=\dfrac{p^2-k}{2}>0$ である。したがって、$0<p\leq\sqrt{2k}$　よって $p=\sqrt{2k}$ のとき最大

$X+Y=\sqrt{2k}$ と $X^2+Y^2=k$ を連立させて解いて

$X=\sqrt{ax}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$ から $x=\dfrac{k}{2a}$、$Y=\sqrt{by}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$ から $y=\dfrac{k}{2b}$

よって、$x=\dfrac{k}{2a}$，$y=\dfrac{k}{2b}$ のとき、最大値は $\sqrt{2k}$

＜解９の別解＞数学Ⅰ：２次方程式の理論（解の配置問題：グラフの利用）

$X=\sqrt{ax}$ 、$Y=\sqrt{by}$ とおくと、$X^2+Y^2=k$ ・・・①　$X+Y=p$ ・・・②となる。

②の両辺を２乗して、$X^2+2XY+Y^2=p^2$　①を代入して整理すると $XY=\dfrac{p^2-k}{2}$ ・・・③

②③から、この X, Y は、２次方程式 $t^2-pt+\dfrac{p^2-k}{2}=0$ の２解である。

$X>0, Y>0$ なる解をもつ条件は、判別式 $D=p^2-4\times\dfrac{p^2-k}{2}\geq 0$

放物線 $f(t)=t^2-pt+\dfrac{p^2-k}{2}$ の　軸 $\dfrac{p}{2}>0$　、Y 切片 $f(0)=\dfrac{p^2-k}{2}>0$

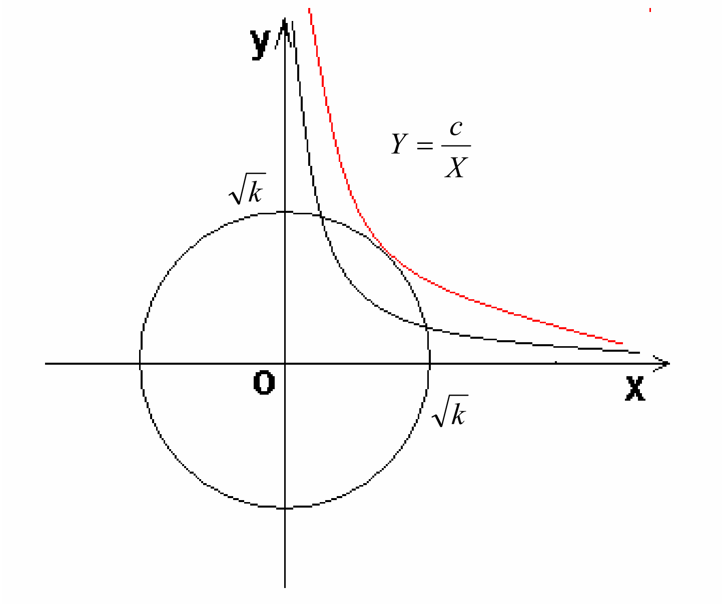
したがって、$0<p\leq\sqrt{2k}$　よって $p=\sqrt{2k}$ のとき最大

$X+Y=\sqrt{2k}$ と $X^2+Y^2=k$ を連立させて解いて

$X=\sqrt{ax}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$ から $x=\dfrac{k}{2a}$、$Y=\sqrt{by}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$ から $y=\dfrac{k}{2b}$

よって、$x=\dfrac{k}{2a}$，$y=\dfrac{k}{2b}$ のとき、最大値は $\sqrt{2k}$

＜解１０＞数学Ⅲ：直角双曲線の利用



$(X+Y)^2=X^2+2XY+Y^2$ から $XY=\dfrac{(X+Y)^2-(X^2+Y^2)}{2}$ ・・・①

$X^2+Y^2=k$（一定値）のときは、①から，$XY=\dfrac{(X+Y)^2-k}{2}$ なので、

XY が最大になるときと $X+Y$ が最大になるときは一致している。
積 XY が最大となるときを、求めればよいので

$X=\sqrt{ax}$ 、$Y=\sqrt{by}$ とおくと、$X>0\,,Y>0$ で、与式は、$X^2+Y^2=k$ なので

原点を中心にした、半径 $\sqrt{k}$ の円の第１象限の部分である。$XY=c$ とおけば、

直角双曲線　$Y=\dfrac{c}{X}$ である。$X>0\,,Y>0$ なので $c>0$

c が最大になるのは、円と直角双曲線が接するときである。連立させて、

$X^2+\left(\dfrac{c}{X}\right)^2=k$ を整理して、$X^4-kX^2+c^2=0$

$X^2=t$ とおき、t についての２次方程式　$t^2-kt+c^2=0$ の判別式 $D=k^2-4c^2=0$ より

$c>0$ で、$c=\dfrac{k}{2}$ である。$XY=\dfrac{k}{2}$ を、$XY=\dfrac{(X+Y)^2-k}{2}$ に代入して

$\dfrac{k}{2}=\dfrac{(X+Y)^2-k}{2}$　　$2k=(X+Y)^2$ と $X+Y>0$ より $X+Y$ の最大値 $\sqrt{2k}$ を得る。

$X+Y=\sqrt{2k}$ と $X^2+Y^2=k$ を連立させて解いて、$X=\sqrt{ax}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$ から $x=\dfrac{k}{2a}$、

$Y=\sqrt{by}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$ から $y=\dfrac{k}{2b}$　　　よって、$x=\dfrac{k}{2a}$，$y=\dfrac{k}{2b}$ のとき、最大値は $\sqrt{2k}$

＜解１１＞凹関数、凸関数の性質から

$f(x)=x^2$ は、凸関数なので、$\dfrac{nf(a)+mf(b)}{m+n} \geq f\left(\dfrac{na+mb}{m+n}\right)$ が成立する。

よって、$X=\sqrt{ax}$ 、$Y=\sqrt{by}$ とおき、$\dfrac{X^2+Y^2}{2} \geq \left(\dfrac{X+Y}{2}\right)^2$ ・・・①を用いて、

$X^2+Y^2=k$ ・・・②　$X+Y=p$ ・・・③

① に②③を代入して、$\dfrac{k}{2} \geq \left(\dfrac{p}{2}\right)^2$ が成立する。$2k \geq p^2$ ・・・④

$X>0, Y>0$ なので $p>0$ ・・・⑤

④⑤から $\therefore 0<p \leq \sqrt{2k}$　$p=\sqrt{2k}$ のとき最大

$X+Y=\sqrt{2k}$ と $X^2+Y^2=k$ を連立させて解いて

$X=\sqrt{ax}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$ から $x=\dfrac{k}{2a}$ 、$Y=\sqrt{by}=\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}$ から $y=\dfrac{k}{2b}$

よって、$x=\dfrac{k}{2a}$, $y=\dfrac{k}{2b}$ のとき、最大値は $\sqrt{2k}$