数学Ⅱから始めよう

＜微分法＞

① 平均変化率　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

② 微分係数　$f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

③ 関数の極限　$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$で、$\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=0$

④ 接線

曲線$y=f(x)$上の$x=a$における接線の方程式は、

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

⑤ 導関数

定義：$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$y=c\Rightarrow y'=0$　　$y=x^n\Rightarrow y'=nx^{n-1}$

⑥ 関数のグラフ

$f'(x)=0$を満たすxを定義域内で調べ、増減表を作る

極大・極小・y切片となる点に注意して描くが、場合によっては

$f(x)=0$の解を求めてx切片も得る。

⑦ 最大・最小

定義域に注意して、増減表から判断する。

⑧ 方程式・不等式への応用

グラフと直線との交点または上下関係を調べればよい。

・$f(x)=a\Rightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ y=a\end{cases}$　交点等を調べる

・$f(x)>g(x)\Rightarrow F(x)=f(x)-g(x)$のグラフで調べる

（増減表のみで対応することもできる）

＜積分法＞

① 不定積分　$\int f(x)dx=F(x)+C$　（C：積分定数）

$\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$

② 定積分　$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=\mathrm{S}$　（Sは符号付面積）

性質：(1) $\int_a^a f(x)dx=0$

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

(4) $\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=\int_a^c\{f(x)+g(x)\}dx$

(5) $\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx & (f(x):\text{偶関数})\\ 0 & (f(x):\text{奇関数})\end{cases}$

(6) $f(x)\geq g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$

③ 微分と定積分　$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

④ ２曲線に囲まれた部分の面積

$S=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx$

特に、α,βが、方程式$ax^2+bx+c=0$の解ならば

$\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx=-\dfrac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$

⑤ 体積

切り口の面積が、$S(x)$のときは$V=\int_\alpha^\beta S(x)dx$

$V=\pi\int_\alpha^\beta\{f(x)\}^2dx$　（回転体の体積）

数学Ⅲから

＜関数と極限＞

① 分数関数

$y=\dfrac{cx+b}{ax+b}$のとき割り算の商と余りを利用して

$y=p+\dfrac{r}{x-q}$と変形できる。このときグラフは、漸近線が、$x=q$, $y=p$の直角双曲線になる。

② 無理関数

$y=k\sqrt{f(x)}$のグラフは、$y^2=k^2f(x)$のグラフで、

$k>0$のときx軸より上半分。

$k<0$のときx軸より下半分。

特に、$y=\sqrt{ax+b}$や$y=-\sqrt{ax+b}$は完璧にしておくこと。

③ 合成関数

$f:x\to y$が$y=f(x)$

$g:x\to y$が$y=g(x)$

$f\circ g:x\xrightarrow{g}g(x)\xrightarrow{f}f(g(x))$

この関数は、$f\circ g(x)=f(g(x))$

④ 逆関数

$y=f(x)$が１：１のとき

$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

逆関数を作るには、定義域に注意して

$y=f(x)$をxについて解き$x=f^{-1}(x)$とし、

ここでxとyを入れ替えて$y=f^{-1}(x)$とする。

⑤ 数列の極限

収束：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$　（極限値がα）

発散：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$　（$+\infty$に発散）

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$　（$-\infty$に発散）

a_nが振動　（極限値なし）

⑥ 知っているべき数列の極限

(a) $k>0$のとき$\lim\limits_{n\to\infty}n^k=+\infty$　（$+\infty$に発散）

(b) $k<0$のとき$\lim\limits_{n\to\infty}n^k=0$　（極限値０）

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}a^n$について、

$a\leq -1$のとき振動

$-1<a<1$のとき$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$

$a=1$のとき$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=1$

$a>1$のとき$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$

⑦ 数列の極限に関する公式

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき

（$n\to\infty$ のとき、$a_n \to \alpha$,$b_n \to \beta$ とも書く）

(a) $a_n > b_n \Rightarrow \alpha \ge \beta$

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ 、$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ 、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

（$\beta \ne 0$）が成立する。

⑧ 無限等比級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

収束・発散について数列の極限と混同しないように注意せよ

収束するのは、$-1 < r < 1$ のときのみで、その和は $\dfrac{a}{1-r}$

$r \ge 1$ のとき $a > 0$ ならば $+\infty$ に発散で $a < 0$ ならば $-\infty$ に発散

$r \le -1$ のときは振動（発散）する。

＜関数の極限＞

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ 　または　$x \to a$ のとき $f(x) \to \alpha$ と表記する。

① $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ 、$\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ 　のとき以下が成立する

$\lim_{x\to a} cf(x) = c\alpha$ 　（c は定数）

$\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$ 　（複号同順）

$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ 　（$\beta \ne 0$）

②右方極限、左方極限について

$\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$ 、$\lim_{x\to a-0} f(x) = \beta$ （極限の存在）

特に、$\alpha = \beta$ のとき、$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ と書くことができる

（つまり、右方極限と左方極限の一致する場合である）

③不定形の極限の対処法

$\dfrac{0}{0}$ 型のときは、分数式ならば約分、無理式は有理化

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型のときは、分母分子を分母の最高次数で割る

$\infty - \infty$ 型のときは、無理式は有理化、整式は最高次数の項でくくり出す

注）右方極限、左方極限は、$y = f(x)$ のグラフの概形を調べるときにも利用される。（漸近線の存在）

＜三角関数・指数関数・対数関数の極限＞

① $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ 　（x は、ラジアン角）

② $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e \cong 2.718281$ 　（自然対数の底）

③指数関数・対数関数のグラフからも分かるように

(1) $a > 1$ ときは

$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ 、$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ 、$\lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty$

(2) $0 < a < 1$ のときは

$\lim_{x\to+\infty} a^x = -\infty$ 、$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ 、$\lim_{x\to+0} \log_a x = +\infty$

＜関数の連続性＞

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ のとき、すなわち $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在し、それが $f(a)$ の値と一致する場合に、この関数は、$x = a$ で連続である

＜中間値の定理＞

閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ は、その区間で $f(a), f(b)$ の間の任意の値をとる。特に $f(a)f(b) < 0$ ならば、区間 (a,b) に $f(c) = 0$ となる c が、少なくとも 1 つ存在する。

（方程式の解の存在を示す場合に利用される。）

＜導関数＞

⑨ $x = a$ における微分係数 　$f'(a) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

⑩ 導関数の定義：$f'(x) = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

＜微分法＞

① 積の微分：$y = f(x)g(x) \Rightarrow y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

② 商の微分：$y = \dfrac{g(x)}{f(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{f(x)\}^2}$

③ 合成関数の微分：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

$y = f(u)$ で $u = g(x)$ のとき、つまり

$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x))g'(x)$ である

④ 陰関数の微分：$F(x,y) = 0$ のとき、y を x の関数とみて両辺を x で微分する。y が x の関数のときは、

$\dfrac{d}{dx} f(y) = \dfrac{d}{dy} f(y) \cdot \dfrac{dy}{dx}$ を利用する

⑤ 対数微分法：両辺の対数をとり、両辺を x で微分する。

⑥ 逆関数の微分：$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{f'(x)}$

⑦ 媒介変数表示された関数の微分

$x = f(t)$, $y = g(t)$ 　のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

＜高次導関数＞

$f''(x) = \dfrac{d}{dx} f'(x)$ 、　$f'''(x) = \dfrac{d}{dx} f''(x)$

$\dfrac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x)$ 　（n 階微分）

＜基本的な関数の微分＞

$y = c \Rightarrow y' = 0$ 　（c は定数）

$\boldsymbol{y = x^{\alpha} \Rightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1}}$ 　（$\boldsymbol{\alpha}$ は実数）

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

$\boldsymbol{y = \tan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}} = 1 + \boldsymbol{\tan^2 x}$

$y=\log|x| \Rightarrow y'=\dfrac{1}{x}$

$y=\log_a|x| \Rightarrow y'=\dfrac{1}{x\log a}$

$y=e^x \Rightarrow y'=e^x$

$y=a^x \Rightarrow y'=a^x\log a$　（$a>0, a\neq 1$）

＜対数微分法＞

$y=f(x)$で、両辺の対数をとり$\log|y|=\log|f(x)|$、これを両辺xで微分する。$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$より求める。

＜平均値の定理＞

①関数$f(x)$が区間$[a,b]$で$f'(x)$をもてば、$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

となるcが、区間(a,b)に少なくとも１つ存在する。

②表現の仕方を変えると以下の式を満たすθが存在する。

$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$　（$0<\theta<1$）

（極限値を求める問題にも応用される）

＜接線・法線＞

接線：

曲線$y=f(x)$上の$x=a$における接線の方程式は、

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

法線：

曲線$y=f(x)$上の$x=a$における法線の方程式は、

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

＜関数のグラフ＞

$y=f(x)$で、$y'=f'(x)$を求め$f'(x)$の符号を調べて関数の増減や極大値・極小値を調べるのは、数学IIと同様だが、$y''=f''(x)$の符号を調べて、曲線の凹凸や変曲点を調べることができる。変曲点とは、グラフが下に凸から上に凸に変わる点、またはグラフが上に凸から下に凸に変わる点である。通常は、微分可能な点なので、$f''(x)=0$になるxの値の前後で符号が変わるかを調べることになる。微分可能な点ではないときは、極値と同様に注意を要することになる。

$f''(x)>0$の区間で下に凸

$f''(x)<0$の区間で上に凸

また、漸近線については、$\lim_{x\to a\pm 0} f(x)=\pm\infty$のとき$x=a$

$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$のとき、$y=ax+b$

さらに、グラフの対称性、座標軸との交点、不連続点、存在範囲に注意をして概形を描くことができる。

＜近似式＞

hが十分小さいとき

①1 次の近似式

$f(a+h)\cong f(a)+f'(a)h$

$x=a+h$とすれば、

$f(x)\cong f(a)+f'(a)(x-a)$

さらに、xが十分０に近ければ

$f(x)\cong f(0)+f'(0)x$

特に、近似式　$(1+x)^p=1+px$は、有名である。

②２次の近似式

$$f(a+h)\cong f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2$$

③$|\Delta x|$が十分小さいときは、

$\Delta y=y'\Delta x$と考えて良い。

＜基本的な不定積分＞

積分定数をCとする

⑥ $\displaystyle\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$　（$n\neq -1$）

⑦ $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx=\log|x|+C$

⑧ $\displaystyle\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

⑨ $\displaystyle\int \cos x\,dx=\sin x+C$

⑩ $\displaystyle\int e^x dx=e^x+C$

⑪ $\displaystyle\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+C$

＜積分法＞

① 置換積分

$g(x)=t$とおくと$g'(x)dx=dt$より

$$\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$$

例：$ax+b=t,\ x^2=t,\ \sqrt{1-x}=t,\ \sin x=t$ 等々

または、$x=g(t)$とおき$dx=g'(t)dt$

$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

例：$x=a\sin t,\ x=\tan t, x=at+b$ 等々

注意：定積分のときは、積分範囲が変わるので気をつけること

② 部分積分

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

注意：定積分のときは、求める積分をＩとおいて、繰り返し部分積分を使って求める方法がある。

③ 式の変形

積和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

その他、三角関数の公式、割り算、有理化、部分分数分解で対応する。

注意：置換積分と変形を組み合わせて、三角関数を有理式に変形する方法もあるが乱用は避けよう。

$\tan\dfrac{x}{2}=t$とおくと$dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$で、

$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$　$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　$\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$を利用できる

＜定積分＞

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=\mathrm{S}$　（Sは符号付面積）

$\displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^2}{2}$（円の半分の面積）は有名。

＜定積分の基本性質＞

(0) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_b^a f(x)dx$

(1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

(4) $\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx$

(5) $\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & (f(x):\text{偶関数}) \\ 0 & (f(x):\text{奇関数}) \end{cases}$

(6) $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

余裕があれば、シュワルツの不等式も覚えよう

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right)$$

等号は $\boldsymbol{f(x) = kg(x)}$ のとき成立

＜微分と定積分＞

$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$　（数学Ⅱと同じ）

＜区分求積＞

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$　, $x_k = a + k\Delta x$ として、

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

積分を利用して極限値を求めることに利用される。計算を楽にするため以下の式が良く用いられる

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

＜面積＞

$y = f(x)$ と x 軸に挟まれた部分の面積

$$S = \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$$

２曲線に囲まれた部分の面積

$$S = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx$$

＜体積＞

切り口の面積が、$S(x)$ のときは $V = \int_\alpha^\beta S(x)dx$

$V = \pi\int_\alpha^\beta \{f(x)\}^2 dx$　（回転体の体積）

＜曲線の長さ＞

① $y = f(x)$ の孤の長さ

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}dx$$

② $x = f(t)$, $y = g(t)$ の孤の長さ

$$s = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}dt \text{ n}$$

＜速度・加速度・点の位置＞

時刻 t の関数として、点の位置が $s = s(t)$ のとき

$$\underset{\text{点の位置}}{s(t)} \xrightarrow{\text{微分}} \underset{\text{速度}}{v(t)} \xrightarrow{\text{微分}} \underset{\text{加速度}}{a(t)}$$

計算上は、$s'(t) = v(t), s''(t) = a(t)$

逆に考えて、$\underset{\text{加速度}}{a(t)} \xrightarrow{\text{積分}} \underset{\text{速度}}{v(t)} \xrightarrow{\text{積分}} \underset{\text{点の位置}}{s(t)}$

計算上は、$s(t) = \int_a^t v(t)dt + s(a)$ 、$v(t) = \int_a^t a(t)dt + v(a)$

注）平面運動のときは、ベクトルとして扱う。

速度ベクトル $\vec{v} = (v_x(t), v_y(t))$

加速度ベクトル $\vec{a} = (a_x(t), a_y(t))$

注）速さはベクトルの大きさ $|\vec{v}|$ である。

＜道のり＞

$l = \int_a^t |v(t)|dt$

＜微分方程式＞

① 変数分離形 $\boldsymbol{f(y)dy = g(x)dx}$ と変形して、両辺を積分して解く $\boldsymbol{\int f(y)dy = \int g(x)dx}$

② 同次型の場合 $y = ux$ とおくと、変数分離形に帰着される $\boldsymbol{f(u)du = g(x)dx}$

③ $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx} = ky}$ の一般解は $\boldsymbol{y = Ce^{kx}}$ （$\boldsymbol{C}$ は任意定数）

大学では

三角関数（三角関数の逆数）を導入

$y = \dfrac{1}{\sin x} = \mathrm{csec}\, x \Rightarrow y' = -c\sec x \cdot \cot x$

$y = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \cdot \tan x$

$y = \dfrac{1}{\tan x} = \cot x \Rightarrow y' = -c\sec^2 x$

※上記は公式として覚えなくても良い

＜逆三角関数＞

三角関数の逆関数を導入

$y = \sin^{-1} x$　$(-1 \leq x \leq 1)$　⇔　$x = \sin y$　$(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$

$y = \cos^{-1} x$　$(-1 \leq x \leq 1)$　⇔　$x = \cos y$　$(0 \leq y \leq \pi)$

$y = \tan^{-1} x$　$(-\infty \leq x \leq \infty)$　⇔　$x = \tan y$　$(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$

これにより

$y = \sin^{-1} x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 \leq x \leq 1)$

$y = \cos^{-1} x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 \leq x \leq 1)$

$y = \tan^{-1} x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

＜*hyperbolic*（ハイパボリック関数）＞

$y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \cosh x$

$y = \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow y' = \sinh x$

$y = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

＜ライプニッツ Leibniz の定理＞

積の微分の高次導関数について

$\{f(x)\cdot g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x)$ が成立する

＜ロピタル l'Hopital の定理＞

$\frac{0}{0}$ 型のとき、分母、分子を微分してから極限を求める方法

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

＜テーラーTaylor の定理＞

h が十分小さいとき（$h = b - a$）

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots$$

＜マクローリン Maclaurin 展開＞

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

展開例

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha\, x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + \cdots$$

ここで、特に$\alpha = \pm\frac{1}{2}$のとき、つまり次の展開式は有名である

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \cdots$$

また、

① $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

$-\infty < x < \infty$

② $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

③ $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

④ $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$

上記①～③式から、$x = i\theta$ として（$i = \sqrt{-1}$）

オイラーEuler の公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を得る

ここで$\theta = \pi$ とするとオイラーの等式：$e^{i\pi} + 1 = 0$ を得る

その他

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

も有名である

＜無理関数の積分＞

$\sqrt[n]{ax+b} = t$ とおくと $ax+b = t^n$ $adx = nt^{n-1}dt$ から

$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ とおく

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ は、a の符号、$ax^2+bx+c=0$ 判別式 D により変形が異なる。例えば$a>0$ で判別式 $D>0$ ならば

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x-\beta)\sqrt{\frac{x-\alpha}{x-\beta}}$ で $\sqrt{\frac{x-\alpha}{x-\beta}} = t$ とおくと

$\frac{x-\alpha}{x-\beta} = t^2$ 、$x-\alpha = t^2(x-\beta)$ 、$x = \frac{\alpha-\beta t^2}{1-t^2}$ より

＜積分公式＞

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C$$

$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \pm\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$ （複合 a>0：＋or　a<0：－）

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C$$

$$\int\sqrt{x^2+A}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+A} + A\log\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C$$

$$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

＜定積分の公式＞

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\cos nx\ dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\ dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\ dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\ dx = \begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \pi\ (m=n\neq 0)\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\ dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin smx\sin nx\ dx = \begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \pi\ (m=n\neq 0)\end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\ dx = \begin{cases}\frac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} & (n：偶数)\\ \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{n(n-2)\cdots 5\cdot 3} & (n：奇数)\end{cases}$$

$a>0$ のとき $\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$ 、

$$\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin bx\ dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin\theta\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cos\theta\ d\theta = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}\theta\cos^{2n+1}\theta\ d\theta = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$

＜広義積分＞

① 定義されない端点がある場合

区間$(a,b]$で定義されている場合

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

区間$[a,b)$で定義されている場合

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

② 無限積分について

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{T\to-\infty}\int_T^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty\\ T\to-\infty}}\int_T^R f(x)dx$$

＜ガンマ Gamma 関数＞

実数$s>0$ のとき、$\Gamma(s) = \int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}dx$ は収束して$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

特に、n が正の整数のとき、$\Gamma(n)=(n-1)!$

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=n!$$

さらに、$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

＜ベータ Beta 関数＞

$$B(p,q)=\int_0^\infty x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ dx=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

（実数 $p>0$　$,q>0$）

＜ヘルダーHölder の不等式＞

シュワルツの不等式

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2\le\left(\int_a^b\{f(x)\}^2dx\right)\left(\int_a^b\{g(x)\}^2dx\right)$$ の発展形

$p>1$　$,q>1$　$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ のとき

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\le\left\{\int_a^b|f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_a^b|g(x)|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

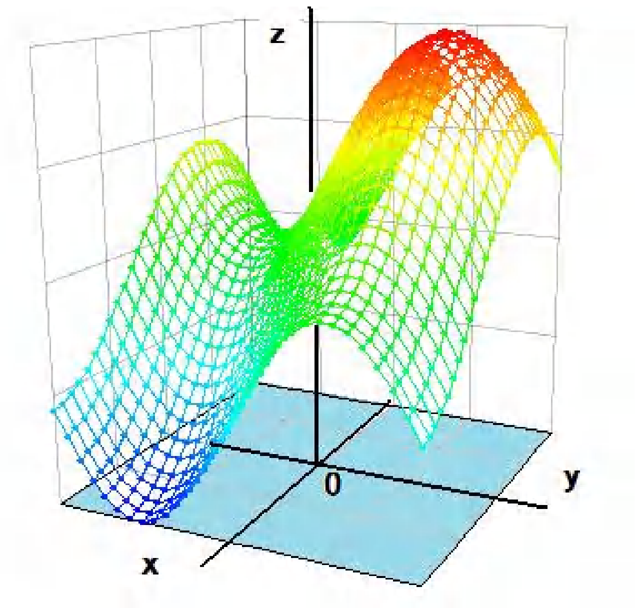
＜2 変数関数＞

2 変数 x と y が決まると、z が決まる関数を

$z=f(x,y)$ と記述する

平面上の点 (x,y) に関数の値 z を対応させたものと考えれば、

グラフは下図のように $x\ y$ 平面上の点 (x,y) に z 軸方向の高さを対応させてた曲面の３Ｄイメージである



（上図は $z=\sin x+\cos y$ である）

＜偏導関数＞

2 変数関数について、偏導関数を定義する

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

偏導関数を求めることを偏微分すると呼ぶ

記号は場面に応じて

$\frac{\partial z}{\partial x}$　z_x　$f_x(x,y)$　$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$　$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$　$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ 等々と表記される

＜第 2 次偏導関数＞

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$　z_{xx}　$f_{xx}(x,y)$　$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$　$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y)$　$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$　z_{xy}　$f_{xy}(x,y)$　$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$　$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)$　$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$

等々と表記される

＜ｒ回偏微分可能なとき新記号の導入＞

$z=f(x,y)$ がｒ回偏微分可能なとき

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(x,y)=\sum {}_rC_i\frac{\partial^r}{\partial x^i\partial y^{r-i}}h^i k^{r-i}$$

例えばｒ＝２のとき

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}k^2$$

＜2 変数のテーラーTaylor の定理＞

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a,b)+\cdots$$

＜2 変数のマクローリン Maclaurin 展開＞

$$f(x,y)=f(0,0)+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)+\frac{1}{3!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0,0)+\cdots$$

これは

$$f(x,y)=f(0,0)+\left(x\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}+y\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}x^2+2xy\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}y^2\right)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^3}x^3+3x^2y\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x^2\partial y}+3xy^2\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 f(0,0)}{\partial y^3}y^3\right)+\cdots$$

とも書くことができる

＜全微分可能＞

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta x)-f(x,y+\Delta x)}{\Delta x}=f_x(x,y)$$

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x,y+\Delta x)-f(x,y)}{\Delta x}=f_y(x,y)$$

とすれば、高さの増分 Δz が

$\Delta z=f_x(x.y)\Delta x+f_y(x.y)\Delta y+\varepsilon(x,y)$ で

$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$ のとき全微分可能であるという

（x 軸方向の差と y 軸方向の差で、高さの差を近似できるという意味）

＜全微分＞

曲面 $z=f(x,y)$ で、x 座標の増分 dx と y 座標の増分 dy で、

高さの増分 dz が次の式で表される

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

＜接平面の方程式＞

点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面は

$$z=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b)$$

＜極値をとる条件＞

$$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{f(a,b)}=\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{f(a,b)}=0$$

＜陰関数の微分＞

方程式 $\boldsymbol{f(x,y)-k}=0$ の表すグラフにおいて

$\boldsymbol{z=g(x,y)=f(x,y)-k}$ とおいて偏微分を利用する

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}=-\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}$$

＜陰関数の極値定理＞

$f(x,y)=0$ のグラフにおける極値を調べる方法

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=0 \text{ のとき } y''=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_{xx}(x,y)}{f_y(x,y)}$$

$-\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)}>0$ ならば点 (a,b) において極小

$-\dfrac{f_{xx}(a,b)}{f_y(a,b)}<0$ ならば点 (a,b) において極大

＜ラグランジュ Lagrange 乗数法＞

$\boldsymbol{g(x,y)}=0$ という条件のもとで、$\boldsymbol{z=f(x,y)}$ の極値を求める方法

$\boldsymbol{L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)}$ に対して、$\dfrac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial x}=\dfrac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial y}=\dfrac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \lambda}=0$ から決定

これは次のような連立方程式を解くことになる

$$\begin{cases}\boldsymbol{f_x(x,y)-\lambda g_x(x,y)}=0\\ \boldsymbol{f_y(x,y)-\lambda g_y(x,y)}=0\\ \boldsymbol{g(x,y)}=0\end{cases}$$

※極値の候補が分かる

同様に

$\boldsymbol{g(x.y,z)}=0$，$\boldsymbol{h(x.y,z)}=0$ という条件のもとで、$\boldsymbol{w=f(x.y,z)}$ の極値を求める方法

$\boldsymbol{L(x,y,\lambda,\eta)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y)-\eta h(x,y,z)}$ に対して、

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial x}=\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial y}=\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial z}=\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \lambda}=\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \eta}=0 \text{ から決定}$$

＜chain rule 連鎖律公式＞

$\boldsymbol{z=f(x,y)}$ で、　$\boldsymbol{x=p(t),y=q(t)}$ 　のとき

$$\frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dt}}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}$$

＜２変数の合成関数の偏微分＞

$\boldsymbol{z=f(x,y)}$ で、　$\boldsymbol{x=p(u,v),y=q(u,v)}$ 　のとき

$\boldsymbol{z=f(p(u,v).q(u,v))}$ の偏微分は

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

微分行列を用いての表記は

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}$$

例示：極座標のときは

$\boldsymbol{z=f(x.y)}$ で、　$\boldsymbol{x=r\cos\theta,y=r\sin\theta}$ 　のとき

つまり $\boldsymbol{z=f(r\cos\theta,r\sin\theta)}$

$$\begin{cases}z_r=z_x\cos\theta+z_y\sin\theta\\ z_\theta=-z_x r\sin\theta+z_y r\cos\theta\end{cases}$$

微分行列を用いての表記は

$$\begin{pmatrix}z_r\\ z_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_x\\ z_y\end{pmatrix}$$

さらに

$$z_x{}^2+z_y{}^2=z_r{}^2+\frac{1}{r^2}z_\theta{}^2$$

$$z_{xx}+z_{yy}=z_{rr}+\frac{1}{r}z_r+\frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}$$

が成立することが知られている

＜２変数の合成関数の微分＞

$\boldsymbol{z=f(x.y)}$ 、$\boldsymbol{w=g(x.y)}$ で、　$\boldsymbol{x=x(t),y=y(t)}$ 　のとき

$(z,w)=(f(x(t).y(t)),g(x(t).y(t))$ が合成関数

$\boldsymbol{z=f(x(t).y(t))}$ に chain rule を適用

$$\frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dt}}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}$$

$\boldsymbol{w=g(x(t).y(t))}$ に chain rule を適用

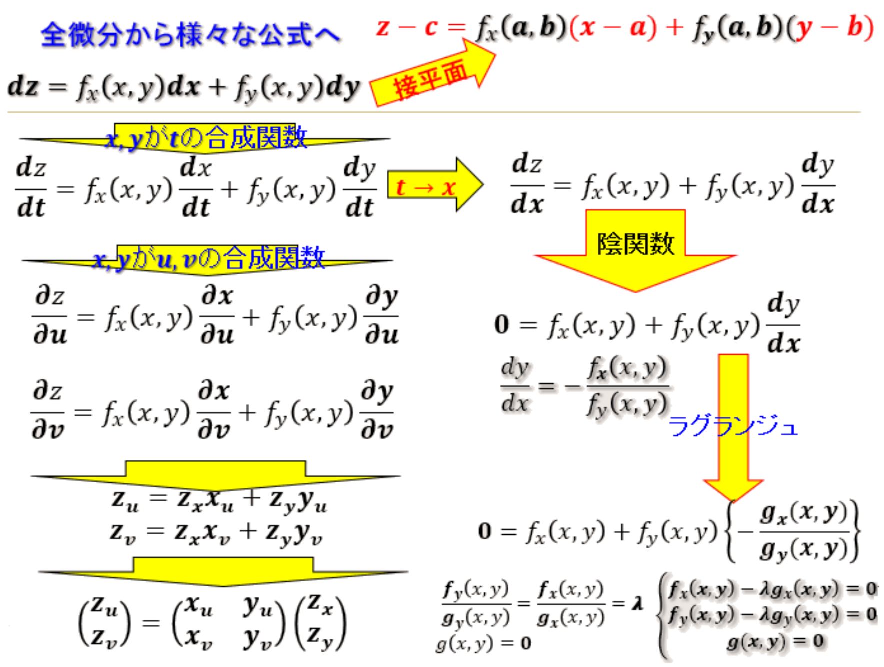
$$\frac{\boldsymbol{dw}}{\boldsymbol{dt}}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}$$

微分行列で表現すると

$$\begin{pmatrix}\frac{dz}{dt}\\ \frac{dw}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\end{pmatrix} \text{ となる。}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y}\end{pmatrix}$$ 　chain rule をまとめて扱える

＜全微分から２変数合成関数の偏微分への流れ図＞



＜2 変数関数の極大・極小の判定＞

$$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{f(a,b)}=\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{f(a,b)}=0 \text{ とき } \left(\boldsymbol{h}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial y}\right)\boldsymbol{f(a,b)}=0$$

テーラーTaylor の定理から $\boldsymbol{a+h=x,b+k=y}$

$$\boldsymbol{f(a+h,b+k)=f(a,b)}+\frac{1}{2!}\left(\boldsymbol{h}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\boldsymbol{f(a,b)}+\cdots$$

$$\boldsymbol{f(x,y)-f(a,b)}\cong\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{f(a,b)}}{\partial x^2}\boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{xy}\frac{\partial^2\boldsymbol{f(a,b)}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\boldsymbol{f(a,b)}}{\partial y^2}\boldsymbol{y}^2\right)$$

ここで、2 次関数が一定の符号を持つとき

$$g(x,y)=\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}x^2+2xy\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}y^2$$ で、

$$=px^2+2qxy+y^2=p\left(x+\frac{q}{p}y\right)^2+\frac{pr-q^2}{p}y^2$$

とおいて

$\Delta=pr-q^2>0$ のとき極値をとる

$p>0$ のとき極小点

$p<0$ のとき極大点

$\Delta=pr-q^2<0$ のときどちらでもない

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}\end{pmatrix}$$ の行列式 $|A|=\det A$

$$\Delta=|A|=\det A=\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}\right)^2$$

$p=\dfrac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}$ とすると次で判定できる

$\Delta>0$ のとき極値をとる

　$p>0$ のとき極小点

　$p<0$ のとき極大点

$\Delta<0$ のときどちらでもない

＜重積分＞

D 上の重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$

＜フビニ Fubini の定理＞

$z=f(x,y)$ の長方形 K($a\le x\le b$, $c\le y\le d$) における重積分は累次積分で計算できる

$$\iint_K f(x,y)dxdy=\int_c^d\left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy$$

さらに図形 D 内の線分の両端が、区間 $\varphi(y)\le x\le\eta(y)$ のとき

$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d\left\{\int_{\varphi(y)}^{\eta(y)} f(x,y)dx\right\}dy$ と計算できる

＜重積分の線形性＞

$$\iint_D\left(af(x,y)+bg(x,y)\right)dxdy=a\iint_D f(x,y)dxdy+b\iint_D g(x,y)dxdy$$

＜重積分の加法性＞

領域 D がある境界線で E と F に分割できる

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_E f(x,y)dxdy+\iint_F f(x,y)dxdy$$

＜2 変数の置換積分（重積分の変数変換）＞

$I=\iint_D f(x,y)dxdy$ で $x=g(s,t)$, $y=h(s,t)$ と置き換えたとき、領域 D は領域Ｅになり、$z=f(g(s,t),h(s,t))=k(s,t)$ のとき

$$I=\iint k(s,t)\left|\frac{\partial(g,h)}{\partial(s,t)}\right|\iint_E k(s,t)\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial s} & \frac{\partial g}{\partial t}\\ \frac{\partial h}{\partial s} & \frac{\partial h}{\partial t}\end{pmatrix}\right|dsdt=\iint_E k(s,t)\left\|\begin{matrix}\frac{\partial g}{\partial s} & \frac{\partial g}{\partial t}\\ \frac{\partial h}{\partial s} & \frac{\partial h}{\partial t}\end{matrix}\right\|dsdt$$

$$I=\iint_E k(s,t)\left|\frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s}\right|dsdt$$

この $\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(s,t)}=\dfrac{\partial g}{\partial s}\dfrac{\partial h}{\partial t}-\dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\partial h}{\partial s}$ をヤコビ行列(Jacobian matrix)と呼ぶ

＜正規分布に関わる有名な積分＞

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

さらに $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ で、$t=x^2$ と置き換えて

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt$$

これはガンマ関数であり、$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

＜3 重積分＞

領域Ｄは

$$\left\{(x,y,z)\middle|a_1\le x\le a_2,\ g_1(x)\le y\le g_2(x),\ h_1(x,y)\le z\le h_{2(x,y)}\right\}$$

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\int_{a_1}^{a_2}\left\{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\left\{\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right\}dy\right\}dx$$

＜３変数の置換積分（重積分の変数変換）＞

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint_G f(g(s,t,u),h(s,t,u),l(s,t,u))\left|\frac{\partial(g,h,l)}{\partial(s,t,u)}\right|dsdtdu$$

ここで、$\dfrac{\partial(g,h,l)}{\partial(s,t,u)}=\begin{vmatrix}g_s & g_t & g_u\\ h_s & h_t & h_u\\ l_s & l_t & l_u\end{vmatrix}$ 3 次のヤコビアン

＜極座標変換＞

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint_G f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

＜領域 D の面積＞

$\iint_D f(x,y)dxdy$ で $f(x,y)=1$ つまり $\iint_D dxdy$ で求まる

＜正項級数の収束＞

各項　$a_n>0$ のとき

$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$ が収束する必要十分条件は

部分和 S_n として数列 $\{S_n\}$ ： $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_n$ が有界であること

＜比較判定法＞

2 つの正項級数　$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ で $a_n\le b_n$ のとき

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ が収束すれば $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が発散すれば $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ も発散

＜ダランベールの判定法＞

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ において

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$ が存在するとき

・$0\le\rho<1$ のとき収束

・$1<\rho\le\infty$ のとき発散

＜コーシー・アダマール Cauchy-Hadamard の判定法＞

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ において

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$ が存在するとき

・$0\le\rho<1$ のとき収束

・$1<\rho\le\infty$ のとき発散

＜絶対収束級数の収束＞

各項の絶対値を項とする無限級数

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束すれば、$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も収束する

・$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束級数と呼ぶ（$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束）

・$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は条件収束級数と呼ぶ（$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束しない）

＜べき級数＞

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

・$x=\alpha$ で収束するならば$|x|<|\alpha|$ を満たすすべての x で絶対収束

・$x=\alpha$ で発散するならば$|x|>|\alpha|$ を満たすすべての x で発散

＜ダランベール d'Alembert の定理＞

べき級数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ において $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$ は収束半径

＜べき級数の微分＞

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}n a_n x^{n-1}$$ （項別微分）

収束半径も一致する

＜べき級数の積分＞

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n x^n dx$$ （項別積分）

したがって

$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ が成立する

収束半径も一致する

＜その他の有名展開式＞

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots\right)$$

$$\log a = 2\left\{\frac{a-1}{a+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^5 + \cdots + \frac{1}{2n-1}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2n-1} + \cdots\right\}$$

$$\sin^{-1}x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

＜フーリエ Fourier 級数＞

区間$[-\pi,\pi]$で $f(x)$ が積分できるとき

以下を a_n と b_n をフーリエ係数と呼び

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx & (n = 0,1,2\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx & (n = 1,2,3\cdots) \end{cases}$$

これを用いて関数展開したもの

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

を、フーリエ Fourier 級数という

さらに、$f(x)$ が偶関数ならば

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ で、係数$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$

$f(x)$ が奇関数ならば

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ で、係数$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$

＜ライプニッツ Leibniz の公式＞

フーリエ Fourier 級数において

$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi \le x < 0) \\ 1 & (0 \le x < \pi) \end{cases}$ とおくと $f(x)$ が奇関数

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx = \begin{cases} \frac{4}{2\pi} & (n = 2n+1\text{のとき}) \\ 0 & (n = 2n\text{のとき}) \end{cases}$ であり

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \cdots\right)$$

ここで $x = \frac{\pi}{2}$ を代入して

$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$ なので$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\cdots$ となり

ライプニッツの公式$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ を得る

別の証明では $x = \tan\theta$ として

$dx = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ 、$dx = (1+\tan^2\theta)d\theta$ したがって

$dx = (1+x^2)d\theta$ 、$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

次の等比級数の和を用いて

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+x^2} \qquad (|x|<1)$$

$\frac{d\theta}{dx} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{2n} + \cdots$ の両辺を積分すれば

$\theta = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7\cdots$ ここで$\theta = \frac{\pi}{4}$ とすると $x = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

よって、$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\cdots$ で、ライプニッツの公式成立する