

教育課程（数学Ⅲ・数学C）

<ベクトル>（数B→数C）

① ベクトルの演算

和・差・実数倍については、文字の計算と同様

② ベクトルの成分表示

$$\text{平面ベクトル： } \vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 = (x_1, y_1)$$

$$\text{空間ベクトル： } \vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3 = (x_1, y_1, z_1)$$

成分での計算ができるようにすること

③ ベクトルの内積： $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

平面ベクトル：

$$\vec{a} = (x_1, y_1) \quad \vec{b} = (x_2, y_2) \text{ のとき、 } \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

空間ベクトル：

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \text{ のとき}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

④ ベクトルの大きさ

$$\text{平面上： } |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\text{空間上： } |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} \text{ は、良く用いられる。}$$

⑤ m : n に分ける点： $\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$

⑥ 図形への応用（空間ベクトルも同様である）

図形問題を解く上では、各点の位置ベクトル

$A(\vec{a}), B(\vec{b}), \dots (\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \dots)$ を用いるが、始点

をある点にした方が良く判断した場合は、例えば、

$\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b} \dots$ 等とおいて解答することも良くある。

次のものは常識である。

・ 中点： $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

・ 三角形の重心： $\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

・ 平行条件： $\vec{a} = t\vec{b} \quad (t: \text{実数})$

・ 垂直条件： $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

・ 一直線上にある条件： $\vec{AB} = t\vec{AC} \quad (t: \text{実数})$

・ なす角を求める： $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ から θ を決定

・ ベクトル方程式

直線のベクトル方程式は

(1) 1点 \vec{a} と方向ベクトル \vec{d} : $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \quad (t: \text{実数})$

(2) 2点 \vec{a}, \vec{b} を通る : $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \quad (t: \text{実数})$

(3) 角の二等分線

$$\vec{p} = t \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

平面のベクトル方程式（平面ABC上に点Pが存在）

(1) $\vec{AP} = s\vec{AB} + t\vec{AC} \quad (\text{実数 } s, t \text{ の存在})$

(2) $\vec{p} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \quad (r + s + t = 1)$

円・球面について、ベクトル方程式： $|\vec{p} - \vec{a}| = r$

(1) 平面上では、円

(2) 空間上では、球面

成分表示した場合は、それぞれの方程式は

円： $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

球面： $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

注) 交点を求めるには上記のベクトル方程式で、各座標（成分）を媒介変数表示して求める。

直線・平面について、ベクトル方程式： $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ は、

(1) 平面上では、直線

(2) 空間上では、平面

<複素数平面>（数Ⅲ→数C）

☆基本的には、複素数平面上の各点が、各複素数に対応していることを用いて、図形的な扱いが出来るようになってきていることが必要である。特に回転に関して扱われることが多い。

図形問題を解く上では、複素数の計算の図形的意味（和・差は平行移動で、積・商は回転等）を考えて解く場合が多いが、絶対値を

計算する方法で、ある複素数とそれに共役な複素数の積 $z\bar{z} = |z|^2$

を用いて解答することが良くある。また、複素数を極形式

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に直せない、ほとんど全ての問題は解けない。

い。

$i^2 = -1$ を用いる。特に、割り算は、分母に共役な複素数を分

母に共役な複素数 $(a + bi \Leftrightarrow a - bi)$ を分母と分子に掛けることを用いて計算する。それ以外は、文字の計算と同じである。

<複素数の大きさ・偏角>（旧々数Ⅲ復活）

$z = a + bi$ のとき、 $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z\bar{z} = |z|^2$ を利用することは頻出

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ で、偏角 $\arg z = \theta$

① 共役な複素数

$z = \bar{z}$ のとき、 z は実数

$z = -\bar{z}$ のとき、 z は純虚数 ($z \neq 0$)

垂直条件：

β

② 複素数平面 (数 C)

$z = a + bi$ を点 (a, b) と考える

- ・点 z と x 軸 (実軸) に関して対称な点 \bar{z}
- ・点 z と y 軸に (虚軸) に関して対称な点 $-\bar{z}$
- ・点 z と原点に関して対称な点 $-z$

③ 演算と図形的意味

和と差はベクトルと同じ扱いで処理
積は、回転して絶対値倍

④ ド・モアブルの定理 (複素数の n 乗を求めるには)

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

⑤ 1 の n 乗根

$z^n = 1$ は n 個あり

$$z_k = \cos\left(\frac{360^\circ}{n} \times k\right) + i \sin\left(\frac{360^\circ}{n} \times k\right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

注) 図と併用すると解きやすい

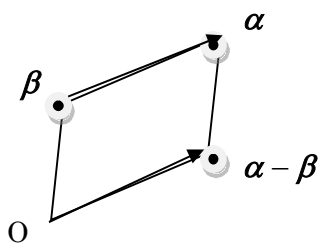
⑭ α の n 乗根 ($z^n = \alpha$)

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおき、両辺を極形式で表して比較せよ

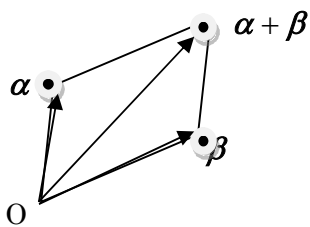
参考) $\alpha_k = \alpha_0 z_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ z_k は上の 1 の n 乗根

α_0 は、 $z^n = \alpha$ の解のひとつ

⑮ 点 $\alpha - \beta$ の位置関係 (平行四辺形)



⑯ 点 $\alpha + \beta$ の位置関係 (平行四辺形)

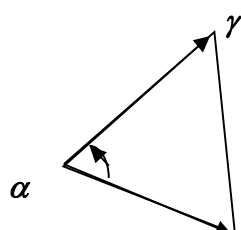


⑰ 点 α, β の距離 $|\beta - \alpha|$

⑱ $m : n$ に分ける点 : $\gamma = \frac{n\alpha + m\beta}{m + n}$

⑲ 2 直線のなす角

$$\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \angle BAC$$



・ $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が純虚数 $AB \perp AC$

・ $\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}$ が純虚数 $AB \perp CD$

($-z = \bar{z}$ ならば z は純虚数と連動させて解く場合が多い)

・ 一直線上にある条件：

$\alpha = k\beta$ (実数倍) \Leftrightarrow 3点 O, A, B が同一直線上

$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が実数 \Leftrightarrow 点 A, B, C は、一直線上

($z = \bar{z}$ ならば z は実数と連動させて解く場合が多い)
平行条件

・ $\frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}$ が実数 $\Leftrightarrow AB \parallel CD$

⑳ 回転移動

- ・ 回転の中心が原点のとき
複素数 $\cos \theta + i \sin \theta$ をかける
- ・ 回転の中心が α のとき

β を θ 回転した点が γ の式は、

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \cos \theta + i \sin \theta$$

・ 点 β を回転して (回転の中心 α から) r 倍の点 γ

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

(三角形の形状を調べることが出来る)

21 円の方程式 $|z - \alpha| = r$

$n|z - \alpha| = m|z - \beta|$ の表す図形の調べ方

($m : n = 1 : 1$ のときは直線である)

(1) $z\bar{z} = |z|^2$ の利用

(2) $z = x + yi$ とおく方法

(3) アポロニウスの円

距離が $m : n$ のときなので、2 定点を結ぶ線分を $m : n$ に内分・外分する点を直径の両端とする円

<関数と極限> (数III)

① 分数関数

$y = \frac{cx + b}{ax + b}$ のとき割り算の商と余りを利用して

$y = p + \frac{r}{x - q}$ と変形できる。このときグラフは、漸近線が、

$x = q, y = p$ の直角双曲線になる。

② 無理関数

$y = k\sqrt{f(x)}$ のグラフは、 $y^2 = k^2 f(x)$ のグラフで、

$k > 0$ のとき x 軸より上半分。

$k < 0$ のとき x 軸より下半分。

特に、 $y = \sqrt{ax+b}$ や $y = -\sqrt{ax+b}$ は完璧にしておくこと。

③ 合成関数

$f: x \rightarrow y$ が $y = f(x)$

$g: x \rightarrow y$ が $y = g(x)$

$f \circ g: x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$

この関数は、 $f \circ g(x) = f(g(x))$

④ 逆関数

$y = f(x)$ が 1 : 1 のとき

$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

逆関数を作るには、定義域に注意して

$y = f(x)$ を x について解き $x = f^{-1}(x)$ とし、

ここで x と y を入れ替えて $y = f^{-1}(x)$ とする。

⑤ 数列の極限

収束: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (極限值が α)

発散: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ($+\infty$ に発散)

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ($-\infty$ に発散)

a_n が振動 (極限值なし)

⑥ 知っているべき数列の極限

(a) $k > 0$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty$ ($+\infty$ に発散)

(b) $k < 0$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = 0$ (極限值 0)

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ について、

$a \leq -1$ のとき振動

$-1 < a < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

$a = 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1$

$a > 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$

⑦ 数列の極限に関する公式

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ のとき

($n \rightarrow \infty$ のとき、 $a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$ と書く)

(a) $a_n > b_n \Rightarrow \alpha \geq \beta$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha\beta, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

($\beta \neq 0$) が成立する。

⑧ 無限等比級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

収束・発散について数列の極限と混同しないように注意せよ

収束するのは、 $-1 < r < 1$ のときのみで、その和は $\frac{a}{1-r}$

$r \geq 1$ のとき $a > 0$ ならば $+\infty$ に発散で $a < 0$ ならば $-\infty$ に発散
 $r \leq -1$ のときは振動 (発散) する。

< 関数の極限 >

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ または $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow \alpha$ と表記する。

① $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ のとき以下が成立する

$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c\alpha$ (c は定数)

$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$ (複号同順)

$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$)

② 右方極限、左方極限について

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \beta$ (極限の存在)

特に、 $\alpha = \beta$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ と書くことができる

(つまり、右方極限と左方極限の一致する場合である)

③ 不定形の極限の対処法

$\frac{0}{0}$ 型の場合は、分数式ならば約分、無理式は有理化

$\frac{\infty}{\infty}$ 型の場合は、分母分子を分母の最高次数で割る

$\infty - \infty$ 型の場合は、無理式は有理化、整式は最高次数の項でくくり出す

注) 右方極限、左方極限は、 $y = f(x)$ のグラフの概形を調べる

ときにも利用される。(漸近線の存在)

< 三角関数・指数関数・対数関数の極限 >

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (x は、ラジアン角)

② $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \cong 2.718281$ (自然対数の底)

③ 指数関数・対数関数のグラフからも分かるように

(1) $a > 1$ のときは

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$$

(2) $0 < a < 1$ のときは

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = +\infty$$

<関数の連続性>

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ のとき、すなわち $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在し、それが $f(a)$

の値と一致する場合に、この関数は、 $x = a$ で連続である

<中間値の定理>

閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ は、その区間で $f(a), f(b)$ の間の

任意の値をとる。特に $f(a)f(b) < 0$ ならば、区間 (a, b) に $f(c) = 0$

となる c が、少なくとも 1 つ存在する。

(方程式の解の存在を示す場合に利用される。)

<導関数> (数Ⅲ)

① $x = a$ における微分係数 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

② 導関数の定義: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

<微分法> (数Ⅲ)

① 積の微分: $y = f(x)g(x) \Rightarrow y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

② 商の微分: $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

③ 合成関数の微分: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$

$y = f(u)$ で $u = g(x)$ のとき、つまり

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x))g'(x) \text{ である}$$

④ 陰関数の微分: $F(x, y) = 0$ のとき、 y を x の関数とみて両辺

を x で微分する。 y が x の関数のときは、

$$\frac{d}{dx} f(y) = \frac{d}{dy} f(y) \cdot \frac{dy}{dx} \text{ を利用する}$$

⑤ 対数微分法: 両辺の対数を取り、両辺を x で微分する。

⑥ 逆関数の微分: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}$

⑦ 媒介変数表示された関数の微分

$x = f(t), y = g(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

<高次導関数>

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x), \quad f'''(x) = \frac{d}{dx} f''(x)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x) \quad (n \text{ 階微分})$$

<基本的な関数の微分>

$$y = c \Rightarrow y' = 0 \quad (c \text{ は定数})$$

$$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1} \quad (n \text{ は実数})$$

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \log|x| \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \log_a|x| \Rightarrow y' = \frac{1}{x \log a}$$

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \log a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

<平均値の定理>

① 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で $f'(x)$ をもてば、 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

となる c が、区間 (a, b) に少なくとも 1 つ存在する。

② 表現の仕方を変えると以下の式を満たす θ が存在する。

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \quad (0 < \theta < 1)$$

(極限值を求める問題にも応用される)

<接線・法線>

接線:

曲線 $y = f(x)$ 上の $x = a$ における接線の方程式は、

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

法線:

曲線 $y = f(x)$ 上の $x = a$ における法線の方程式は、

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

<関数のグラフ>

$y = f(x)$ で、 $y' = f'(x)$ を求め $f'(x)$ の符号を調べて関数の増

減や極大値・極小値を調べるのは、数学Ⅱと同様だが、

$y'' = f''(x)$ の符号を調べて、曲線の凹凸や変曲点を調べること

ができる。変曲点とは、グラフが下に凸から上に凸に変わる点、またはグラフが上に凸から下に凸に変わる点である。通常は、微分可能な点なので、 $f''(x) = 0$ になる x の値の前後で符号が変わ

るかを調べることになる。微分可能な点ではないときは、極値と同様に注意を要することになる。

また、漸近線については、 $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm\infty$ のとき $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0 \text{ のとき、 } y = ax + b$$

さらに、グラフの対称性、座標軸との交点、不連続点、存在範囲に注意をして概形を描くことができる。

<近似式>

h が十分小さいとき

① 1 次の近似式

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a)h$$

$x = a+h$ とすれば、

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a)$$

さらに、 x が十分 0 に近ければ

$$f(x) \cong f(0) + f'(0)x$$

特に、近似式 $(1+x)^p = 1+px$ は、有名である。

② 2 次の近似式

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2$$

③ $|\Delta x|$ が十分小さいときは、

$$\Delta y = y'\Delta x \text{ と考えて良い。}$$

<基本的な不定積分> (数Ⅲ)

積分定数を C とする

$$\textcircled{1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\textcircled{2} \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

$$\textcircled{3} \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\textcircled{4} \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\textcircled{5} \int e^x dx = e^x + C$$

$$\textcircled{6} \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

<積分法>

① 置換積分

$g(x) = t$ とおくと $g'(x)dx = dt$ より

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

例： $ax+b=t, x^2=t, \sqrt{1-x}=t, \sin x=t$ 等々

または、 $x = g(t)$ とおき $dx = g'(t)dt$

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

例： $x = a \sin t, x = \tan t, x = at + b$ 等々

注意：定積分のときは、積分範囲が変わるので気をつけること

② 部分積分

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

注意：定積分のときは、求める積分を I とおいて、繰り返し部分積分を使って求める方法がある。

③ 式の変形

積和の公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

その他、三角関数の公式、割り算、有理化、部分分数分解で対応する。

注意：置換積分と変形を組み合わせ、三角関数を有理式に変形する方法もあるが乱用は避けよう。

$$\tan \frac{x}{2} = t \text{ とおくと } dx = \frac{2}{1+t^2} dt \text{ で、}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \text{ を利用で}$$

きる

<定積分> (数Ⅲ)

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = S \quad (S \text{ は符号付面積})$$

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{2} \quad (\text{円の半分の面積}) \text{ は有名。}$$

<定積分の基本性質>

$$(0) \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

$$(1) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$(2) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$(3) \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$(4) \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx$$

$$(5) \int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x)dx & (f(x): \text{偶関数}) \\ 0 & (f(x): \text{奇関数}) \end{cases}$$

$$(6) f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

余裕があれば、シュワルツの不等式も覚えよう

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x)dx \right\}^2 \leq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \right) \left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx \right)$$

<微分と定積分>

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (\text{数学IIと同じ})$$

<区分求積>

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x \text{ として、}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$$

積分を利用して極限值を求めることに利用される。計算を楽にするため以下の式が良く用いられる

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

<面積>

$y = f(x)$ と x 軸に挟まれた部分の面積

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

2 曲線に囲まれた部分の面積

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

<体積>

$$\text{切り口の面積が、} S(x) \text{ のときは } V = \int_a^b S(x) dx$$

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \quad (\text{回転体の体積})$$

<曲線の長さ> (数III)

① $y = f(x)$ の弧の長さ

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

② $x = f(t), y = g(t)$ の弧の長さ (旧々数III復活)

$$s = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$$

<速度・加速度・点の位置>

時刻 t の関数として、点の位置が $s = s(t)$ のとき

$$\begin{array}{ccccc} s(t) & \xrightarrow{\text{微分}} & v(t) & \xrightarrow{\text{微分}} & a(t) \\ \text{点の位置} & & \text{速度} & & \text{加速度} \end{array}$$

計算上は、 $s'(t) = v(t), s''(t) = a(t)$

$$\begin{array}{ccccc} \text{逆に考えて、} & a(t) & \xrightarrow{\text{積分}} & v(t) & \xrightarrow{\text{積分}} & s(t) \\ & \text{加速度} & & \text{速度} & & \text{点の位置} \end{array}$$

計算上は、 $s(t) = \int_a^t v(t)dt + s(a), v(t) = \int_a^t a(t)dt + v(a)$

注) 平面運動のときは、ベクトルとして扱う。

$$\text{速度ベクトル } \vec{v} = (v_x(t), v_y(t))$$

$$\text{加速度ベクトル } \vec{a} = (a_x(t), a_y(t))$$

注) 速さはベクトルの大きさ $|\vec{v}|$ である。

<道のり> (数III)

$$l = \int_a^t |v(t)| dt$$

<微分方程式> (旧数IIIの内容入試用)

① 変数分離形 $f(y)dy = g(x)dx$ と変形して、両辺を

$$\text{積分して解く } \int f(y)dy = \int g(x)dx$$

② 同次型の場合 $y = ux$ とおくと、変数分離形に帰着

$$\text{される } f(u)du = g(x)dx$$

③ $\frac{dy}{dx} = ky$ の一般解は $y = Ce^{ky}$ (C は任意定数)

<2次曲線> (数III→数C)

e を離心率とする

① 円: $x^2 + y^2 = r^2$ 焦点(0,0) 準線なし

② 楕円: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 焦点 $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ 準線 $x = \pm\frac{a}{e}$

③ 双曲線: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 焦点 $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ 準線 $x = \pm\frac{a}{e}$

④ 放物線: $y^2 = 4px$ 焦点 $(p, 0)$ 準線 $x = -p$

注意: 楕円での $a > b > 0$ と $b > a > 0$ の違い。双曲線での

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 、放物線 $x^2 = 4py$ も、焦点、準線、どのような図

形になるかを押さえておくこと。

<2次曲線の接線> (数III→数C)

接点 (x_1, y_1) のとき

① 円: $x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow$ 接線 $x_1x + y_1y = r^2$

② 楕円: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow$ 接線 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

③ 双曲線: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow$ 接線 $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

④ 放物線: $y^2 = 4px \rightarrow$ 接線 $y_1y = 2p(x + x_1)$

接線の作り方を統一して覚えておこう。

<2次曲線の平行移動> (旧数C→数III)

x 軸方向に x_1 、 y 軸方向に y_1 平行移動する

$$F(x, y) = 0 \rightarrow F(x - x_1, y - y_1) = 0$$

<離心率での2次曲線の分類I>

定点 F と定直線 g からの距離の比が $e:1$ と、一定である点 P の

軌跡は、① $0 < e < 1$ のとき楕円 離心率 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

② $e=1$ のとき放物線 離心率 $e=1$

③ $e>1$ のとき双曲線 離心率 $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

[④ $e=0$ のとき円]

定点 F と定直線 g に下ろした垂線の足を H とする。 $e = \frac{PF}{PH}$ を

離心率という

注) 焦点 F 、準線 g である

< 離心率での 2 次曲線の分類 II >

曲方程式の表す曲線

$r(1 + e \cos \theta) = l$ ($l > 0$) で、

① $0 < e < 1$ のとき楕円

② $e = 1$ のとき放物線

③ $e > 1$ のとき双曲線

[④ $e = 0$ のとき円]

< 媒介変数表示 > (旧数 C → 数 III)

④ 円 : $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

⑤ 楕円 : $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$

⑥ 双曲線 : $x = \frac{a}{\cos \theta}, y = b \tan \theta$

⑦ サイクロイド : $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$

< 極座標と極方程式 > (旧数 C → 数 III)

直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad x^2 + y^2 = r^2$$

特に、極方程式 $r = f(\theta)$ で表される曲線は、

$x = f(\theta) \cos \theta, y = f(\theta) \sin \theta$ である。

良くある曲方程式

① 中心 (r_0, θ_0) 、半径 a の円 : $r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) = a^2$

注) 左辺は、2 点 (r, θ) (r_0, θ_0) 間の距離を表す

② 極 O を通り、始線 OX となす角が α である直線 : $\theta = \alpha$

③ 点 $A(a, \alpha)$ を通り、 OA に垂直な直線 : $r \cos(\theta - \alpha) = a$

($a > 0$)

< 色々な曲線 > (旧数 C → 数 III)

① カージオイド (心臓形) : $r = a(1 + \cos \theta)$

② アルキメデスの渦巻き線 : $r = a\theta$

③ 正葉曲線 : $r = \sin a\theta$

④ リマソン (蝸牛線) : $r = a + b \cos \theta$

⑤ レムニスケート : $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$

