

# 新教育課程（数学Ⅲ）

＜複素数平面＞（一部旧数C→数Ⅲ）

☆基本的には、複素数平面上の各点が、各複素数に対応していることを用いて、図形的な扱いが出来るようになっていることが必要である。特に回転に関して扱われることが多い。

図形問題を解く上では、複素数の計算の図形的意味（和・差は平行移動で、積・商は回転等）を考えて解く場合が多いが、絶対値を計算する方法で、ある複素数とそれに共役な複素数の積  $z\bar{z} = |z|^2$  を用いて解答することが良くある。また、複素数を極形式  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  に直せないと、ほとんど全ての問題は解けない。

$i^2 = -1$  を用いる。特に、割り算は、分母に共役な複素数を分母に共役な複素数 ( $a + bi \leftrightarrow a - bi$ ) を分母と分子に掛けることを用いて計算する。それ以外は、文字の計算と同じである。  
＜複素数の大きさ・偏角＞（旧々数Ⅲ復活）

$$z = a + bi \text{ のとき、 } r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z\bar{z} = |z|^2 \text{ を利用することは頻出}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ で、偏角 } \arg z = \theta$$

## ① 共役な複素数

$$z = \bar{z} \text{ のとき、 } z \text{ は実数}$$

$$z = -\bar{z} \text{ のとき、 } z \text{ は純虚数 } (z \neq 0)$$

## ② 複素数平面（旧々数Ⅲ復活）

$z = a + bi$  を点  $(a, b)$  と考える

- ・点  $z$  と  $x$  軸（実軸）に関して対称な点  $\bar{z}$
- ・点  $z$  と  $y$  軸に（虚軸）に関して対称な点  $-\bar{z}$
- ・点  $z$  と原点に関して対称な点  $-z$

## ③ 演算と図形的意味

和と差はベクトルと同じ扱いで処理  
積は、回転して絶対値倍

## ④ ド・モアブルの定理（複素数の $n$ 乗を求めるには）

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

## ⑤ 1 の $n$ 乗根

$z^n = 1$  は  $n$  個あり

$$z_k = \cos\left(\frac{360^\circ}{n} \times k\right) + i\sin\left(\frac{360^\circ}{n} \times k\right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

注) 図と併用すると解きやすい

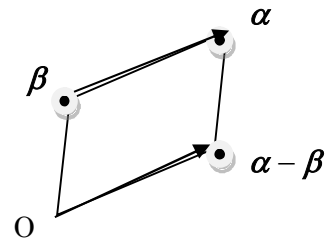
## ⑭ $\alpha$ の $n$ 乗根 ( $z^n = \alpha$ )

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  とおき、両辺を極形式で表して比較せよ

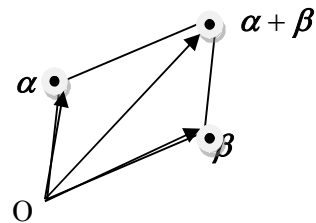
参考)  $\alpha_k = \alpha_0 z_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$   $z_k$  は上の 1 の  $n$  乗根

$\alpha_0$  は、 $z^n = \alpha$  の解のひとつ

## ⑮ 点 $\alpha - \beta$ の位置関係（平行四辺形）



## ⑯ 点 $\alpha + \beta$ の位置関係（平行四辺形）

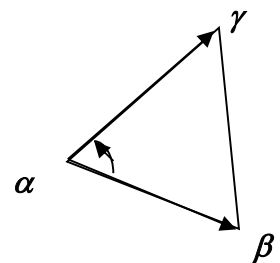


## ⑰ 点 $\alpha, \beta$ の距離 $|\beta - \alpha|$

## ⑱ $m : n$ に分ける点: $\gamma = \frac{n\alpha + m\beta}{m+n}$

## ⑲ 2 直線のなす角

$$\arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \angle BAC$$



垂直条件:

$$\cdot \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ が純虚数 } AB \perp AC$$

$$\cdot \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \text{ が純虚数 } AB \perp CD$$

( $-z = \bar{z}$  ならば  $z$  は純虚数と連動させて解く場合が多い)

・一直線上にある条件:

$$\alpha = k\beta \text{ (実数倍)} \Leftrightarrow 3 \text{ 点 } O, A, B \text{ が同一直線上}$$

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ が実数} \Leftrightarrow \text{点 } A, B, C \text{ は、一直線上}$$

( $z = \bar{z}$  ならば  $z$  は実数と連動させて解く場合が多い)  
平行条件

$$\cdot \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \text{ が実数} \Leftrightarrow AB \parallel CD$$

## ⑳ 回転移動

- ・回転の中心が原点のとき  
複素数  $\cos\theta + i\sin\theta$  をかける
- ・回転の中心が  $\alpha$  のとき

$\beta$  を  $\theta$  回転した点が  $\gamma$  の式は、

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \cos \theta + i \sin \theta$$

・点  $\beta$  を回転して (回転の中心  $\alpha$  から)  $r$  倍の点  $\gamma$

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

(三角形の形状を調べることが出来る)

21 円の方程式  $|z - \alpha| = r$

$n|z - \alpha| = m|z - \beta|$  の表す図形の調べ方

( $m : n = 1 : 1$  のときは直線である)

(1)  $z\bar{z} = |z|^2$  の利用

(2)  $z = x + yi$  とおく方法

(3) アポロニウスの円

距離が  $m : n$  のときなので、2 定点を結ぶ線分を  $m : n$  に内分・外分する点を直径の両端とする円

<関数と極限>

① 分数関数

$y = \frac{cx + b}{ax + b}$  のとき割り算の商と余りを利用して

$y = p + \frac{r}{x - q}$  と変形できる。このときグラフは、漸近線が、

$x = q, y = p$  の直角双曲線になる。

② 無理関数

$y = k\sqrt{f(x)}$  のグラフは、 $y^2 = k^2 f(x)$  のグラフで、

$k > 0$  のとき  $x$  軸より上半分。

$k < 0$  のとき  $x$  軸より下半分。

特に、 $y = \sqrt{ax + b}$  や  $y = -\sqrt{ax + b}$  は完璧にしておくこと。

③ 合成関数

$f : x \rightarrow y$  が  $y = f(x)$

$g : x \rightarrow y$  が  $y = g(x)$

$f \circ g : x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$

この関数は、 $f \circ g(x) = f(g(x))$

④ 逆関数

$y = f(x)$  が 1 : 1 のとき

$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

逆関数を作るには、定義域に注意して

$y = f(x)$  を  $x$  について解き  $x = f^{-1}(y)$  とし、

ここで  $x$  と  $y$  を入れ替えて  $y = f^{-1}(x)$  とする。

⑤ 数列の極限

収束 :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  (極限値が  $\alpha$ )

発散 :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  ( $+\infty$  に発散)

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  ( $-\infty$  に発散)

$a_n$  が振動 (極限値なし)

⑥ 知っているべき数列の極限

(a)  $k > 0$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty$  ( $+\infty$  に発散)

(b)  $k < 0$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = 0$  (極限値 0)

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$  について、

$a \leq -1$  のとき振動

$-1 < a < 1$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

$a = 1$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1$

$a > 1$  のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$

⑦ 数列の極限に関する公式

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  のとき

( $n \rightarrow \infty$  のとき、 $a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$  とも書く)

(a)  $a_n > b_n \Rightarrow \alpha \geq \beta$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

( $\beta \neq 0$ ) が成立する。

⑧ 無限等比級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

収束・発散について数列の極限と混同しないように注意せよ

収束するのは、 $-1 < r < 1$  のときのみで、その和は  $\frac{a}{1-r}$

$r \geq 1$  のとき  $a > 0$  ならば  $+\infty$  に発散で  $a < 0$  ならば  $-\infty$  に発散  
 $r \leq -1$  のときは振動 (発散) する。

<関数の極限>

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$  または  $x \rightarrow a$  のとき  $f(x) \rightarrow \alpha$  と表記する。

①  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ 、 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$  のとき以下が成立する

$\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c\alpha$  ( $c$  は定数)

$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$  (複号同順)

$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

② 右方極限、左方極限について

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \beta \quad (\text{極限の存在})$$

特に、 $\alpha = \beta$  のとき、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$  と書くことができる

(つまり、右方極限と左方極限の一致する場合である)

③ 不定形の極限の対処法

$\frac{0}{0}$  型のときは、分数式ならば約分、無理式は有理化

$\frac{\infty}{\infty}$  型のときは、分母分子を分母の最高次数で割る

$\infty - \infty$  型のときは、無理式は有理化、整式は最高次数の項でくくり出す

注) 右方極限、左方極限は、 $y = f(x)$  のグラフの概形を調べる  
ときにも利用される。(漸近線の存在)

< 三角関数・指数関数・対数関数の極限 >

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (x \text{ は、ラジアン角})$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \cong 2.718281 \quad (\text{自然対数の底})$$

③ 指数関数・対数関数のグラフからも分かるように

(1)  $a > 1$  のときは

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$$

(2)  $0 < a < 1$  のときは

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = +\infty$$

< 関数の連続性 >

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  のとき、すなわち  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  が存在し、それが  $f(a)$

の値と一致する場合に、この関数は、 $x = a$  で連続である

< 中間値の定理 >

閉区間  $[a, b]$  で連続な関数  $f(x)$  は、その区間で  $f(a), f(b)$  の間の

任意の値をとる。特に  $f(a)f(b) < 0$  ならば、区間  $(a, b)$  に  $f(c) = 0$

となる  $c$  が、少なくとも 1 つ存在する。

(方程式の解の存在を示す場合に利用される。)

< 導関数 >

$$\textcircled{1} x = a \text{ における微分係数 } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\textcircled{2} \text{ 導関数の定義: } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

< 微分法 >

$$\textcircled{1} \text{ 積の微分: } y = f(x)g(x) \Rightarrow y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\textcircled{2} \text{ 商の微分: } y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\textcircled{3} \text{ 合成関数の微分: } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

$y = f(u)$  で  $u = g(x)$  のとき、つまり

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x))g'(x) \text{ である}$$

④ 陰関数の微分:  $F(x, y) = 0$  のとき、 $y$  を  $x$  の関数とみて両辺  
を  $x$  で微分する。 $y$  が  $x$  の関数のときは、

$$\frac{d}{dx} f(y) = \frac{d}{dy} f(y) \cdot \frac{dy}{dx} \text{ を利用する}$$

⑤ 対数微分法: 両辺の対数を取り、両辺を  $x$  で微分する。

$$\textcircled{6} \text{ 逆関数の微分: } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)}$$

⑦ 媒介変数表示された関数の微分

$x = f(t), y = g(t)$  のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

< 高次導関数 >

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x), \quad f'''(x) = \frac{d}{dx} f''(x)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x) \quad (n \text{ 階微分})$$

< 基本的な関数の微分 >

$$y = c \Rightarrow y' = 0 \quad (c \text{ は定数})$$

$$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1} \quad (n \text{ は実数})$$

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \log|x| \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \log_a|x| \Rightarrow y' = \frac{1}{x \log a}$$

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \log a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

<平均値の定理>

①関数  $f(x)$  が区間  $[a, b]$  で  $f'(x)$  をもてば、 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

となる  $c$  が、区間  $(a, b)$  に少なくとも 1 つ存在する。

②表現の仕方を変えると以下の式を満たす  $\theta$  が存在する。

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \quad (0 < \theta < 1)$$

(極限值を求める問題にも応用される)

<接線・法線>

接線：

曲線  $y = f(x)$  上の  $x = a$  における接線の方程式は、

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

法線：

曲線  $y = f(x)$  上の  $x = a$  における法線の方程式は、

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

<関数のグラフ>

$y = f(x)$  で、 $y' = f'(x)$  を求め  $f'(x)$  の符号を調べて関数の増減や極大値・極小値を調べるのは、数学 II と同様だが、

$y'' = f''(x)$  の符号を調べて、曲線の凹凸や変曲点を調べることができる。変曲点とは、グラフが下に凸から上に凸に変わる点、またはグラフが上に凸から下に凸に変わる点である。通常は、微分可能な点なので、 $f''(x) = 0$  になる  $x$  の値の前後で符号が変わ

るかを調べることになる。微分可能な点ではないときは、極値と同様に注意を要することになる。

また、漸近線については、 $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = \pm\infty$  のとき  $x = a$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0 \text{ のとき、 } y = ax + b$$

さらに、グラフの対称性、座標軸との交点、不連続点、存在範囲に注意をして概形を描くことができる。

<近似式>

$h$  が十分小さいとき

① 1 次の近似式

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a)h$$

$x = a + h$  とすれば、

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)(x - a)$$

さらに、 $x$  が十分 0 に近ければ

$$f(x) \cong f(0) + f'(0)x$$

特に、近似式  $(1+x)^p = 1+px$  は、有名である。

② 2 次の近似式

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2$$

③  $|\Delta x|$  が十分小さいときは、

$\Delta y = y'\Delta x$  と考えて良い。

<基本的な不定積分>

積分定数を  $C$  とする

$$\textcircled{1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\textcircled{2} \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

$$\textcircled{3} \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\textcircled{4} \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\textcircled{5} \int e^x dx = e^x + C$$

$$\textcircled{6} \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

<積分法>

① 置換積分

$g(x) = t$  とおくと  $g'(x)dx = dt$  より

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

例： $ax + b = t, x^2 = t, \sqrt{1-x} = t, \sin x = t$  等々

または、 $x = g(t)$  とおき  $dx = g'(t)dt$

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

例： $x = a \sin t, x = \tan t, x = at + b$  等々

注意：定積分のときは、積分範囲が変わるので気をつけること

② 部分積分

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

注意：定積分のときは、求める積分を  $I$  とおいて、繰り返し部分積分を使って求める方法がある。

③ 式の変形

積和の公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

その他、三角関数の公式、割り算、有理化、部分分数分解で対応する。

注意：置換積分と変形を組み合わせて、三角関数を有理式に変形する方法もあるが乱用は避けよう。

$$\tan \frac{x}{2} = t \text{ とおくと } dx = \frac{2}{1+t^2} dt \text{ で、}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \text{ を利用で}$$

きる

<定積分>

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = S \quad (S \text{ は符号付面積})$$

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{2} \quad (\text{円の半分の面積}) \text{ は有名。}$$

<定積分の基本性質>

$$(0) \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

$$(1) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$(2) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$(3) \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$(4) \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx$$

$$(5) \int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x)dx & (f(x): \text{偶関数}) \\ 0 & (f(x): \text{奇関数}) \end{cases}$$

$$(6) f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

余裕があれば、シュワルツの不等式も覚えよう

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x)dx \right\}^2 \leq \left( \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \right) \left( \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \right)$$

<微分と定積分>

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (\text{数学IIと同じ})$$

<区分求積>

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x \text{ として、}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

積分を利用して極限值を求めることに利用される。計算を楽にするため以下の式が良く用いられる

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

<面積>

$y = f(x)$  と  $x$  軸に挟まれた部分の面積

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

2 曲線に囲まれた部分の面積

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

<体積>

切り口の面積が、 $S(x)$  のときは  $V = \int_a^b S(x) dx$

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx \quad (\text{回転体の体積})$$

<曲線の長さ> (旧々数III復活)

①  $y = f(x)$  の弧の長さ

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

②  $x = f(t), y = g(t)$  の弧の長さ (旧々数III復活)

$$s = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$$

<速度・加速度・点の位置>

時刻  $t$  の関数として、点の位置が  $s = s(t)$  のとき

$$\begin{array}{ccccc} s(t) & \xrightarrow{\text{微分}} & v(t) & \xrightarrow{\text{微分}} & a(t) \\ \text{点の位置} & & \text{速度} & & \text{加速度} \end{array}$$

計算上は、 $s'(t) = v(t), s''(t) = a(t)$

$$\text{逆に考えて、} \begin{array}{ccccc} a(t) & \xrightarrow{\text{積分}} & v(t) & \xrightarrow{\text{積分}} & s(t) \\ \text{加速度} & & \text{速度} & & \text{点の位置} \end{array}$$

計算上は、 $s(t) = \int_a^t v(t) dt + s(a), v(t) = \int_a^t a(t) dt + v(a)$

注) 平面運動のときは、ベクトルとして扱う。

$$\text{速度ベクトル } \vec{v} = (v_x(t), v_y(t))$$

$$\text{加速度ベクトル } \vec{a} = (a_x(t), a_y(t))$$

注) 速さはベクトルの大きさ  $|\vec{v}|$  である。

<道のり> (旧々数III復活)

$$l = \int_a^t |v(t)| dt$$

<微分方程式> (旧数IIIの内容入試用)

① 変数分離形  $f(y)dy = g(x)dx$  と変形して、両辺を

$$\text{積分して解く } \int f(y)dy = \int g(x)dx$$

② 同次型の場合  $y = ux$  とおくと、変数分離形に帰着

される  $f(u)du = g(x)dx$

③  $\frac{dy}{dx} = ky$  の一般解は  $y = Ce^{kx}$  ( $C$  は任意定数)

<2次曲線> (旧数C→数III)

$e$  を離心率とする

① 円:  $x^2 + y^2 = r^2$  焦点(0,0) 準線なし

② 楕円:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  焦点  $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$  準線  $x = \pm \frac{a}{e}$

③ 双曲線:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  焦点  $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$  準線  $x = \pm \frac{a}{e}$

④ 放物線:  $y^2 = 4px$  焦点  $(p, 0)$  準線  $x = -p$

注意: 楕円での  $a > b > 0$  と  $b > a > 0$  の違い。双曲線での

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 、放物線  $x^2 = 4py$  も、焦点、準線、どのような図

形になるかを押さえておくこと。

< 2次曲線の接線 > (旧数 C→数Ⅲ)

接点  $(x_1, y_1)$  のとき

① 円 :  $x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow$  接線  $x_1x + y_1y = r^2$

② 楕円 :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow$  接線  $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

③ 双曲線 :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow$  接線  $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

④ 放物線 :  $y^2 = 4px \rightarrow$  接線  $y_1y = 2p(x + x_1)$

接線の作り方を統一して覚えておこう。

< 2次曲線の平行移動 > (旧数 C→数Ⅲ)

x 軸方向に  $x_1$ 、軸方向に  $y_1$  平行移動する

$F(x, y) = 0 \rightarrow F(x - x_1, y - y_1) = 0$

< 離心率での 2次曲線の分類 I >

定点 F と定直線 g からの距離の比が  $e:1$  と、一定である点 P の

軌跡は、①  $0 < e < 1$  のとき楕円 離心率  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

②  $e = 1$  のとき放物線 離心率  $e = 1$

③  $e > 1$  のとき双曲線 離心率  $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

[④  $e = 0$  のとき円]

定点 F と定直線 g に下ろした垂線の足を H とする。  $e = \frac{PF}{PH}$  を

離心率という

注) 焦点 F、準線 g である

< 離心率での 2次曲線の分類 II >

曲方程式の表す曲線

$r(1 + e \cos \theta) = l \quad (l > 0)$  で、

①  $0 < e < 1$  のとき楕円

②  $e = 1$  のとき放物線

③  $e > 1$  のとき双曲線

[④  $e = 0$  のとき円]

< 媒介変数表示 > (旧数 C→数Ⅲ)

④ 円 :  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

⑤ 楕円 :  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$

⑥ 双曲線 :  $x = \frac{a}{\cos \theta}, y = b \tan \theta$

⑦ サイクロイド :  $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$

< 極座標と極方程式 > (旧数 C→数Ⅲ)

直交座標  $(x, y)$  と極座標  $(r, \theta)$  の関係

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad x^2 + y^2 = r^2$

特に、極方程式  $r = f(\theta)$  で表される曲線は、

$x = f(\theta) \cos \theta, y = f(\theta) \sin \theta$  である。

良くある曲方程式

① 中心  $(r_0, \theta_0)$ 、半径  $a$  の円 :  $r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) = a^2$

注) 左辺は、2点  $(r, \theta)$   $(r_0, \theta_0)$  間の距離を表す

② 極 O を通り、始線 OX となす角が  $\alpha$  である直線 :  $\theta = \alpha$

③ 点  $A(a, \alpha)$  を通り、OA に垂直な直線 :  $r \cos(\theta - \alpha) = a$

$(a > 0)$

< 色々な曲線 > (旧数 C→数Ⅲ)

① カージオイド (心臓形) :  $r = a(1 + \cos \theta)$

② アルキメデスの渦巻き線 :  $r = a\theta$

③ 正葉曲線 :  $r = \sin a\theta$

④ リマソン (蝸牛線) :  $r = a + b \cos \theta$

⑤ レムニスケート :  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$

