新教育課程（数学Ⅱ・数学Ｂ）

＜3次の展開と因数分解＞（旧数Ⅰ→数Ⅱ）

① $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

（左辺から右辺、右辺から左辺共にできる）

② $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

（左辺から右辺、右辺から左辺共にできる）

※ 上記の複号は同順である

余裕があれば、以下の公式も知っていると良い

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

[良くある式の変形]

③ $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

＜二項定理＞（旧数Ａ→数Ⅱ）

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_nb^n$$

パスカルの三角形を利用できること

多項定理：$(a+b+c+\cdots)^n$ の展開式で、$a^pb^qc^r\cdots$ の係数は、$\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots}$ である。

＜式と証明＞（数Ⅱ）

（１）整式の割り算

縦書きの割り算が出来ること

$f(x)$ を $g(x)$ で割って、商が $Q(x)$ で余りが $R(x)$ のときは、

$$\begin{array}{r} Q(x) \\ g(x)\overline{)f(x)} \\ ////// \\ \hline R(x) \end{array}$$

$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$ と書ける。

（２）分数式

① 分母，分子をそれぞれ因数分解し、約分する。→既約分数式

② 加法，減法については、分母を通分し分子の計算をする。

③ 繁分数式→分母・分子に同じ多項式をかけて、普通の分数式になおす。

（３）恒等式

① 数値代入法

② 係数比較法

（４）等式の証明

①左辺＝・・・変形・・・＝右辺

② 左辺＝・・変形・・＝δ

右辺＝・・変形・・＝δ　　$\therefore$左辺＝右辺

③ 左辺—右辺＝０を示せば良い

条件付での等式の証明では、文字を消去することを考える。特に連比の形で条件が与えられえた場合は、比の値を k とおくとよい。

$x:y:z = a:b:c$ ならば、$\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = k$ とおき、$x = ak, y = bk, z = ck$ を与式に代入して処理する。

（５）不等式の証明

① 左辺＞右辺を示すには、左辺—右辺＞０を示せば良い

つまり、

左辺—右辺＝・・変形・・＝δ＞０の形

変形には、与えられた条件に注意して因数分解や平方完成を利用して示す場合が多い。$\sqrt{\ }$ や $|\ |$ 記号が入った場合は、両辺が正であることを確認し、$(左辺)^2 - (右辺)^2 >$ ０を示す。

（注）≧のように等号付きのときは、等号が成立するときをいう。

②左辺＞右辺を示すのに、左辺＞δかつδ＞右辺から示す。

さらに、[相加・相乗平均の関係]

$a > 0, b > 0$ のとき

$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$　（等号は $a = b$ のとき成立）

が成立することを利用する方法がある。

さらに、余裕があれば、以下の方法も知っていると良い

絶対不等式を利用する場合がある。有名な絶対不等式には、シュワルツの不等式

$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geqq (ax + by)^2$ がある。

＜複素数＞（数Ⅱ）

（１）複素数の四則計算

$i^2 = -1$ を用いる。特に、割り算は、分母に共役な複素数（$a + bi \Leftrightarrow a - bi$）を分母と分子に掛けることを用いて計算する。それ以外は、文字の計算と同じである。

（２）２次方程式の解

解の公式を用いる。$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$　また、

b が偶数のとき（$b = 2b'$）は、$x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$

（３）判別式：判別式 $D = b^2 - 4ac$（$\dfrac{D}{4} = b'^2 - ac$）

判別式 $D > 0, D = 0, D < 0$ で解を分類できる

注）図形で交点の数を調べることができる

（４）解と係数の関係

α, β が、方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解ならば

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

これを用いて、解の和と積が分かれば２次方程式を作ることができる。３次方程式の解と係数の関係も作れると良い。

α, β, γ が、方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解ならば

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

※ 数学Ⅰの式の変形より

① $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

② $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

③ $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

（５）剰余の定理

$f(x)$ を $g(x)$ で割って、商が $Q(x)$ で余りが $R(x)$ のときは、

$$\begin{array}{r} Q(x) \\ g(x)\overline{)\,f(x)} \\ ////// \\ \hline R(x) \end{array}$$

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$ と書けるが、とくに $g(x)=x-\alpha$ のとき、
$f(\alpha)=R \Leftrightarrow f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$、割った余りが $f(\alpha)$
$g(x)=ax+b$ のとき、

$f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=R \Leftrightarrow f(x)=(ax+b)Q(x)+R$、割った余りが $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

（６）因数定理

$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(x)=(x-\alpha)Q(x)$
つまり、$f(x)$ は、$x-\alpha$ という因数をもつ
高次方程式は上記因数定理の利用で解く場合が多い。

＜図形と方程式＞（数Ⅱ）

①　２点間の距離

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ のとき

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

②　m ： n に分ける点

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ のとき、線分 AB を m ： n に分ける点は、

$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

注） $mn<0$ のとき外分点

③　三角形の重心

３点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ を頂点とする△ ABC の重心 G の座標は、$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

④　点に関して対称な点

点 $A(a,b)$ に関して２点 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ が対称なとき、

$a=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$b=\dfrac{y_1+y_2}{2}$　が成り立つ。

⑤　直線の方程式

傾き m で、点 (x_1,y_1) を通る： $y-y_1=m(x-x_1)$

２点 (x_1,y_1) (x_2,y_2) を通る： $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

注）分母、または、分子が０のときは座標軸と平行な直線

$x=x_1$，$y=y_1$ となる。

⑥　２直線の位置関係

２直線の傾きが、m_1, m_2 のとき

平行： $m_1=m_2$　（一致の場合も平行に含める）

垂直： $m_2=-\dfrac{1}{m_1}$　（または、$m_1\cdot m_2=-1$）

さらに、余裕があれば以下の公式も知っていると良い

一般形の場合は、$a_1x+b_1y+c_1=0$

$a_2x+b_2y+c_2=0$

平行： $a_1b_2-a_2b_1=0$

垂直： $a_1a_2+b_1b_2=0$

⑦　直線に関して対称な点

２点 A,B が直線 ℓ に関して対称なとき、つぎの２つの事柄が成り立つ。

［1］　直線 AB は ℓ に垂直である。
［2］　直線 AB の中点は ℓ 上にある。

⑧　点と直線の距離

点 (x_1,y_1) と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は、

$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

⑨　円の方程式

一般形： $x^2+y^2+lx+my+n=0$

平方完成により、

標準形：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

となり、中心 (a,b) で半径 r の円を得る

⑩　円と直線の関係

接点が点 (x_1,y_1) で原点を中心とする円のとき

接線： $x_1x+y_1y=r^2$

接点が点 (x_1,y_1) で中心 (a,b) の円のとき

接線：$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

交点の数に関しては、判別式の利用か、中心と直線までの距離を利用して調べることが出来る。

⑪　不等式と領域

直線の上部： $y>ax+b$
直線の下部： $y<ax+b$
曲線の上部： $y>f(x)$
曲線の下部： $y<f(x)$

円の内部：$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$

円の外部：$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$

注）領域内かどうかは、点の座標を代入して成立するかどうかで調べることが出来る。また、境界を含むかどうかは必ずチェックすること。

＜三角関数＞（数Ⅱ）

①　一般角

$\theta=\alpha^\circ+360^\circ\times n$　（n は、整数）

②　弧度法

180° ＝π（ラジアン）

一般角

$\theta=\alpha+2n\pi$　（n は、整数）

③　扇形の弧の長さと面積

半径が r、中心角が θ（ラジアン）の扇形の弧の長さを ℓ、面積をＳとすると

$$\ell = r\theta, \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r\ell$$

④ 相互関係

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

⑤ 三角関数の性質

－１≦$\sin\theta$≦１，－１≦$\cos\theta$≦１

$\sin(-\theta) = -\sin\theta \quad \cos(-\theta) = \cos\theta \quad \tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\theta \pm \frac{\pi}{2}$ や $\theta \pm \pi$ は、図から求めるか、加法定理利用。

⑥ グラフは、１周期分を覚えていること

振幅や周期の変化、平行移動について確実にしておくこと

例えば、 $y = a\sin b(x-\alpha) + c$

⑦ 加法定理

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

⑧ ２倍角・半角・３倍角の公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2} \quad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} \quad \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

⑨ 積和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\}$$

⑩ 和積の公式

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

⑪ 三角関数の合成

$$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$$

ただし、$r = \sqrt{a^2+b^2}$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

注）図を用いて求める方法が便利である。

＜指数関数＞（数Ⅱ）

① 累乗根の計算法則

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \qquad \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

② 指数の拡張

$$a^0 = 1, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

指数法則は、r, s が実数の範囲で成立する。

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{rs} \qquad (ab)^r = a^r b^r$$

③ 指数関数のグラフ

$\boldsymbol{y = a^x}$

$a > 1$ のときは単調に増加

$0 < a < 1$ のときは単調に減少

ともに、y 切片は１、点 $(1, a)$ を通る

④ 大小関係

$a > 1$ のときは、$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$

$0 < a < 1$ のときは、$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$

＜対数関数＞（数Ⅱ）

① 対数の計算法則

$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0$,（ $\log_a \frac{1}{a} = -1$ ）

$$\log_a A + \log_a B = \log_a AB$$

$$\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B}$$

$$\log_a A^n = n\log_a A$$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ （底変換の公式）

余裕があれば以下の式は覚えると便利である。

$$\log_{a^n} b^n = \log_a b, \quad a^{\log_a b} = b$$

② 対数関数のグラフ

$\boldsymbol{y = \log_a x}$

$a > 1$ のときは単調に増加

$0 < a < 1$ のときは単調に減少

ともに、x 切片は１、点 $(a, 1)$ を通る

指数関数とは、直線 $y = x$ に関して対称である

③ 大小関係

$a > 1$ のときは、$\boldsymbol{\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y}$

$0 < a < 1$ のときは、$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$

また、真数条件 $x > 0, y > 0$ に注意せよ。

④ 常用対数（底が１０の対数）

$\log_{10} x$ の値で、x の桁数や小数点以下第何位に初めて０でな

い数が現れるかを調べることが出来る。

$n-1 \leqq \log_{10} x < n \Leftrightarrow x$ が n 桁の数

$-n \leqq \log_{10} x < -(n-1) \Leftrightarrow x$ は、小数点以下第 n 位に初めて０でない数が現れる

＜微分法＞（数Ⅱ）

① 平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

② 微分係数 $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

③ 関数の極限 $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ で、$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0$

④ 接線

曲線 $y=f(x)$ 上の $x=a$ における接線の方程式は、

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

⑤ 導関数

定義：$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$y=c \Rightarrow y'=0 \qquad y=x^n \Rightarrow y'=nx^{n-1}$

⑥ 関数のグラフ

$f'(x)=0$ を満たす x を定義域内で調べ、増減表を作る

極大・極小・y 切片となる点に注意して描くが、場合によっては $f(x)=0$ の解を求めて x 切片を得る。

⑦ 最大・最小

定義域に注意して、増減表から判断する。

⑧ 方程式・不等式への応用

グラフと直線との交点または上下関係を調べればよい。

・$f(x)=a \Rightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=a \end{cases}$ 交点等を調べる

・$f(x)>g(x) \Rightarrow F(x)=f(x)-g(x)$ のグラフで調べる

（増減表のみで対応することもできる）

＜積分法＞（数Ⅱ）

① 不定積分 $\int f(x)dx=F(x)+C$ （C：積分定数）

$\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$

② 定積分 $\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

性質：(1) $\int_a^a f(x)dx=0$

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

(4) $\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx$

(5) $\int_{-a}^a f(x)dx=\begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & (f(x):\text{偶関数}) \\ 0 & (f(x):\text{奇関数}) \end{cases}$

(6) $f(x)\geqq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$

③ 微分と定積分 $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

④ ２曲線に囲まれた部分の面積

$$\boldsymbol{S=\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}dx}$$

特に、α,β が、方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解ならば

$$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

＜ベクトル＞（数 B）

① ベクトルの演算

和・差・実数倍については、文字の計算と同様

② ベクトルの成分表示

平面ベクトル：$\vec{a}=x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}=(x_1,y_1)$

空間ベクトル：$\vec{a}=x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}+z_1\overrightarrow{e_3}=(x_1,y_1,z_1)$

成分での計算ができるようにすること

③ ベクトルの内積：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

平面ベクトル：

$\vec{a}=(x_1,y_1) \quad \vec{b}=(x_2,y_2)$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

空間ベクトル：

$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1) \quad \vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

④ ベクトルの大きさ

平面上：$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

空間上：$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$ は、良く用いられる。

⑤ m：n に分ける点：$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

⑥ 図形への応用（空間ベクトルも同様である）

図形問題を解く上では、各点の位置ベクトル $A(\vec{a}),B(\vec{b})$,・・・（$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,・・・）を用いるが、始点をある点にした方が良いと判断した場合は、例えば、$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$・・・等とおいて解答することも良くある。

次のものは常識である。

・中点：$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

・三角形の重心：$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

・平行条件：$\vec{a}=t\vec{b}$ （t:実数）

・垂直条件：$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

・一直線上にある条件：$\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{AC}$ （t:実数）

・　なす角を求める：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ から θ を決定

・　ベクトル方程式

直線のベクトル方程式は

(1)1 点 $\vec{a}$ と方向ベクトル $\vec{d}$ ： $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$　（t :実数）

(2)2 点 $\vec{a}$,$\vec{b}$ を通る： $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$　（t :実数）

(3)角の二等分線

$$\vec{p} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

平面のベクトル方程式（平面 ABC 上に点 P が存在）

(1) $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$　（実数 s,t の存在）

(2) $\vec{p} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$　（$r+s+t=1$）

円・球面について、ベクトル方程式：$|\vec{p} - \vec{a}| = r$

(1)平面上では、円

(2)空間上では、球面

成分表示した場合は、それぞれの方程式は

円：$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

球面：$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

注）交点を求めるには上記のベクトル方程式で、各座標（成分）を媒介変数表示して求める。

直線・平面について、ベクトル方程式：$\vec{n}\cdot(\vec{p} - \vec{a}) = 0$ は、

(1)平面上では、直線

(2)空間上では、平面

＜数列＞（数 B）

等差数列：$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$　$S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

等比数列：$a_n = ar^{n-1}$　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$　$(r \neq 1)$

数列の和の記号 $\sum$ について

①$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

②$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

③$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

⑤$\displaystyle\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$

さらに余裕があれば、以下の公式も知っていると良い

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

階差数列：$a_{n+1} - a_n = b_n$ のとき

$a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$　（$n \geq 2$）

和と一般項の関係は

$a_1 = S_1$　$a_n = S_n - S_{n-1}$　（$n \geq 2$）

＜漸化式の解法＞（数 B）

等差数列 $a_{n+1} - a_n = d$ や等比数列 $a_{n+1} = ra_n$ の利用

また、階差数列 $a_{n+1} - a_n = b_n$ の利用。

有名なものには、

$a_{n+1} = pa_n + q$　$(p \neq 1) \rightarrow \alpha = p\alpha + q$

を満たす α を用いて→ $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形すると

数列 $\{a_n - \alpha\}$ は、初項 $a_1 - \alpha$ 公比 p の等比数列となるので、

$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha)\cdot p^{n-1} \rightarrow a_n = (a_1 - \alpha)\cdot p^{n-1} + \alpha$

与えられた漸化式が２項間のときは、上記の形が多く、両辺の対数、逆数をとったり、あるもので割り算することにより

$a_{n+1} = pa_n + q$　$(p \neq 1)$ の形に変形できる。

与えられた漸化式が３項間のときは、

$\boldsymbol{pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n} = 0$ の型になるもの

特性方程式：$px^2 + qx + r = 0$ の解で分類する。

２解が α, β のとき

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ と $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$

と変形できる。

＜数学的帰納法＞（数 B）

自然数に関するある命題を証明する方法

（Ⅰ）ある命題で、n=1 のときに成立することを示す。

（Ⅱ）ある命題で、n=k のとき成立を仮定して、n=k+1 のときも成立することを示す。

以上、（Ⅰ）（Ⅱ）より、すべての自然数についてある命題が成立することが証明される。

＜確率分布と統計的な推測＞（旧数C→数B）
基本は確率変数を読み取り確率分布表

X	$x_1\ x_2\ \cdots\ x_{n-1}\ x_n$
P	$p_1\ p_2\ \cdots\ p_{n-1}\ p_n$

（$p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+p_n=1$）

から、
期待値（平均）：

$$E(X)=m=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_{n-1}p_{n-1}+x_np_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$$

分散：

$$V(X)=E((X-m)^2)=(x_1-m)^2p_1+\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k=E(X^2)-\left\{E(X)^2\right\}$$

（分散は、二乗の平均から平均の二乗を引く）

標準偏差：$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

＜確率変数の変換＞（旧数C→数B）
a ,b は定数として
$Y=aX+b$ のとき期待値（平均）、分散、標準偏差は

$$E(Y)=aE(X)+b$$

$$V(Y)=a^2V(X)$$

$$\sigma(Y)=|a|\sigma(X)$$

＜確率変数の和と積＞（旧数C→数B）

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

ここでさらに、X ,Y が互いに独立ならば

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

$$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)$$

＜二項分布＞（旧数C→数B）
二項分布：試行を n 回繰り返し、同じ確率 p で r 回起こるとき
$(r=0,1,2,\cdots,n)$

二項分布 $B(n,p)$ と書く、$P(X=r)={}_nC_rp^r(1-p)^{n-r}$

期待値（平均）$E(X)=np$ 、分散 $V(X)=np(1-p)$
＜確率変数が連続のとき＞（旧数C→数B）
連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ $(\alpha\leq x\leq\beta)$ とは

① $f(x)\geq 0$ （常に正）

② $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=1$ （全面積は１）

③ $P(a\leq X\leq b)=\int_a^b f(x)dx$

（$a\leq X\leq b$ となる確率は面積を計算して求める）

期待値（平均）$E(X)=m=\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx$ 、

分散 $V(X)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-m)^2f(x)dx$

＜正規分布＞（旧数C→数B）

最も有名な確率分布で、正規分布 $N(m,\sigma^2)$ と書く

ここで、$m=E(X)$ 平均、$\sigma^2=V(X)$ 分散である。

通常は標準正規分布 $N(0,1)$ に変換して扱われる。

標準化：$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおく

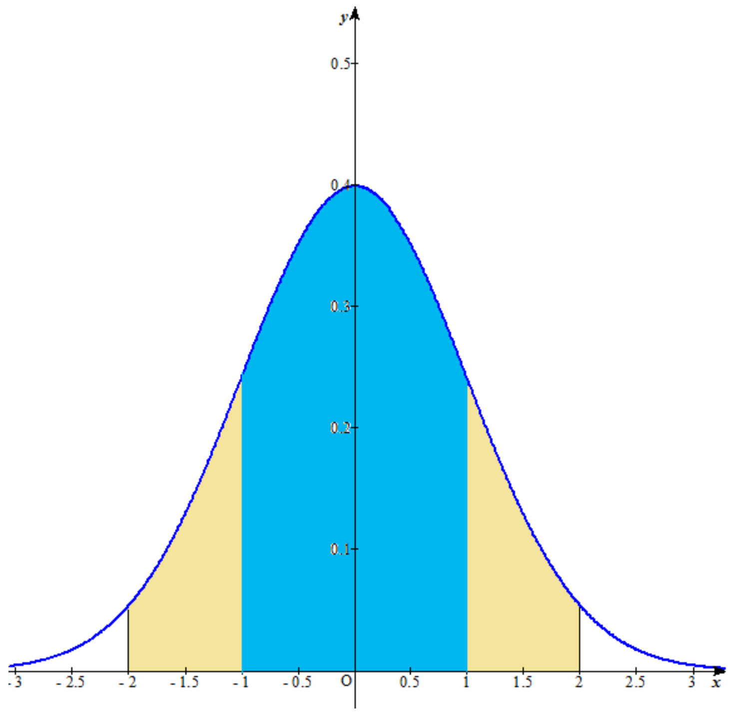
入学試験の偏差値（合格可能性の判定）等々、統計（仮説検定・区間推定）の分野でお馴染みである。

参考１：$N(0,1)$ は、$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$N(m,\sigma^2)$ は、$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

（ここで e はネピア数と呼ばれ自然対数の底として有名な無理数である。$e=2.718\cdots$ である。）

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$



$$P(-1\leq X\leq 1)=\int_{-1}^{1}f(x)dx\cong 0.682$$

$$P(-2\leq X\leq 2)=\int_{-2}^{2}f(x)dx\cong 0.955$$

$$P(-3\leq X\leq 3)=\int_{-3}^{3}f(x)dx\cong 0.997$$

標準偏差の ± 1 の間に入る確率は６８．２％
標準偏差の ± 2 の間に入る確率は９５．５％
標準偏差の ± 3 の間に入る確率は９９．７％
である。
また、
標準偏差の ± 1.96 の間に入る確率は９５％
標準偏差の ± 2.58 の間に入る確率は９９％
$X<-1.64$ または $1.64<X$ に入る確率は５％
を用いて推定や検定という手法が使われる。

参考２：区間推定と仮説検定
かつて、高校でも指導していた内容をまとめる
＜区間推定＞（旧数C→数B）
（Ⅰ）母平均の推定（信頼区間を求める）
ア）　　信頼度95%のとき

$$\text{区間は}\left(\bar{x}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{区間の幅は}2\times1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

イ）　　信頼度99%のとき

$$\text{区間は}\left(\bar{x}-2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{区間の幅は}2\times2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ここで、$\bar{x}$：標本平均の値、n：標本の大きさ（個数）
σ：母標準偏差の値（未知なら標本標準偏差も使用可）
を代入して使用する。
（Ⅱ）母比率の推定
ア）　　信頼度95%のとき

$$\text{区間は}\left(\bar{p}-1.96\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}},\bar{p}+1.96\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right)$$

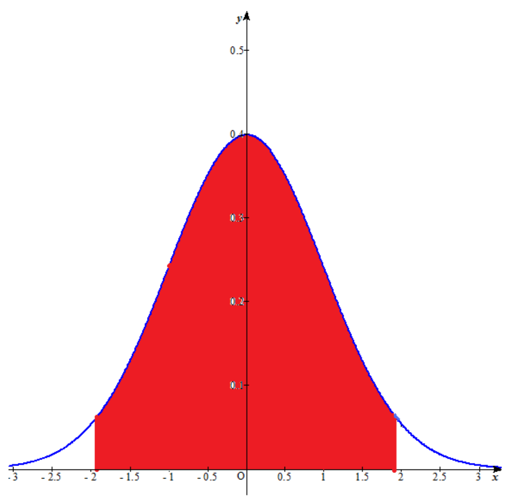
$$\text{区間の幅は}2\times1.96\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

イ）　　信頼度99%のとき

$$\text{区間は}\left(\bar{p}-2.58\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}},\bar{p}+2.58\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right)$$

$$\text{区間の幅は}2\times2.58\cdot\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

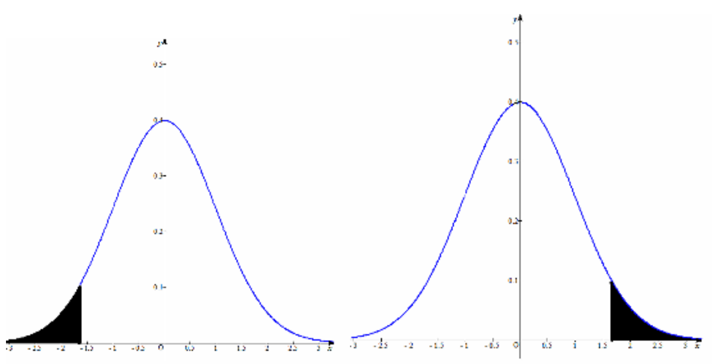
ここで、$\bar{p}$：標本比率の値、n：標本の大きさ（個数）
を代入して使用する。
※推定は信頼区間の幅を変えることにより、%を変えることが可能



上図の赤い部分に確率変数が入るのが通常であり、
その意味で信頼区間と呼ばれている

＜仮説検定＞（旧数C→数B）
（Ⅰ）母平均の検定
① 仮説を立てる（母平均$m=m'$とする）
② 有意水準（危険率）を５%または１%とする
③ 棄却域：$|X|>1.96\Rightarrow5\%$または$|X|>2.58\Rightarrow1\%$
④ 正規分布$N(0,1)$に従うとして$u=\dfrac{\bar{x}-m'}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$を計算する
ここで、m'が仮説平均　$\bar{x}$：標本平均の値、n：標本の大きさ（個数）
⑤ 定めた棄却域に入るか調べる
・入っていれば仮説を棄却する
（$m=a$とは言えないと結論付ける）
・入っていなければ仮説は棄却できない
（$m=a$でないとは言い切れない）
（Ⅱ）母比率の検定
① 仮説を立てる（母比率$p=p'$とする）
② 有意水準（危険率）を５%または１%とする
③ 棄却域：$|X|>1.96\Rightarrow5\%$または$|X|>2.58\Rightarrow1\%$
④ 正規分布$N(0,1)$に従うとして$u=\dfrac{x-np'}{\sqrt{np'(1-p')}}$を計算する
ここで、xは標本の値、p'が仮説比率　n：標本の大きさ（個数）
⑤ 定めた棄却域に入るか調べる
・入っていれば仮説を棄却する
（$p=p'$とは言えないと結論付ける）
・入っていなければ仮説は棄却できない
（$p=p'$でないとは言い切れない）

※初めから大きい値に外れるか小さい値に外れるかが明らかな場合は、片側検定を行うこともある
例えば棄却域を$X<-1.64$または$1.64<X$として、ここに入る確率は５%を用いる



※また、正規分布でなくｔ分布やχ^2分布（ｶｲｼﾞｼﾞｮｳﾌﾞﾝﾌﾟ）を用いるばあいもある。