

新教育課程（数学 I ・ 数学 A）

<式の計算>（数 I）

（1）指数法則

- ① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- ② $(a^m)^n = a^{mn}$
- ③ $(ab)^n = a^n b^n$

（2）因数分解・乗法公式

① $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$ （いわゆる、たすき掛け）

- ② $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- ③ $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
- ④ $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$
- ※ $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$ （旧数 I → 数 II へ）

上記の複号は同順である

[良くある式の変形]

- ① $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
- ② $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

[因数分解の一般的解法]

- ① ある文字について整理する（次数が低いものが良い）
- ② 公式が使える様に変形するか、因数定理の利用（数 II）

<実数>（数 I）（1 部中 3 へ）

有理数：分数の形で書き表すことが可能な数

無理数：分数の形で書き表すことが不可能な数

（1）絶対値の処理

数直線上で、実数 a と原点からの距離は、 $|a|$

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

（2）平方根の計算

分母の有理化や四則計算は確実にできること

- ① $\sqrt{a^2} = |a|$ は、 $(\sqrt{a})^2 = a$ とは違うことに注意せよ
- ② 2 重根号を外すには、

$$\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

<1 次不等式と 2 次方程式>

（1）1 次不等式

① 不等式の性質

$$a < b, c > 0 \quad \text{ならば} \quad ac < bc, \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

$$a < b, c < 0 \quad \text{ならば} \quad ac > bc, \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

② 連立不等式

連立不等式は、数直線を利用して共通部分を求める。

③ 絶対値を含む方程式・不等式

$c > 0$ のとき、方程式 $|x| = c$ の解は、 $x = \pm c$

不等式 $|x| < c$ の解は、 $-c < x < c$

不等式 $|x| > c$ の解は、 $x < -c, c < x$

<2 次方程式>（数 I）（1 部中 3 へ）

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

（注） $a = 0$ だと 1 次方程式になる

（1）2 次方程式の解法

① 因数分解を利用する

$$(ax - b)(cx - d) = 0 \quad \text{から} \quad x = \frac{b}{a}, x = \frac{d}{c}$$

② 解の公式を用いる。

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ のとき、}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

また、 b が偶数のとき ($b = 2b'$)、

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

（2）2 次方程式の実数解の個数

判別式 $D = b^2 - 4ac$ を利用して、

$D > 0, D = 0, D < 0$ で解を分類できる。

<集合>（旧数 A → 数 I）

ベン図の利用と記号と用語の使用法を確実にする

属する： $x \in A$

共通部分： $A \cap B$

和集合： $A \cup B$

補集合： \bar{A}

部分集合： $A \subset B$

要素の個数については、

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) =$$

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

※ド・モルガンの法則について確認すること。

<命題>（旧数 A → 数 I）

条件文： $p \rightarrow q$ の逆・裏・対偶を作ることが出来るようにし、その真偽の判定や証明が出来ること。真偽の判定や証明は集合の包含関係を用いる場合や『元の命題の真偽と対偶の真偽が一致する』ことを用いる。必要条件・十分条件の判断。

[背理法]

結論を否定して推論を進めると、既知事項と矛盾することを示すという証明方法である。

<2 次関数とグラフ>（数 I）

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - p)^2 + q \quad (a \neq 0)$$

$$= a(x - \alpha)(x - \beta)$$

① 平方完成して、頂点 (p, q) を決定する

② 判別式 $D = b^2 - 4ac$ で x 軸との関係を調べる

③ 最大値・最小値に関しては、定義域に注意する

④関数 $y = f(x)$ の平行移動: $y - q = f(x - p)$

⑤関数の決定

1. $y = ax^2 + bx + c$
2. $y = a(x - p)^2 + q$
3. $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$

このうちのどれを使うかは、問題によって使い分ける。

< 2次不等式 > (数 I)

2次不等式の解は、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフから考える。 $a > 0$ として

(1) 判別式 $D = b^2 - 4ac > 0$ のとき

- ① $ax^2 + bx + c < 0$ の解は、 $\alpha < x < \beta$
- ② $ax^2 + bx + c > 0$ の解は、 $x < \alpha, \beta < x$

(2) 判別式 $D = b^2 - 4ac = 0$ のとき

- ① $ax^2 + bx + c < 0$ の解は、ない
- ② $ax^2 + bx + c > 0$ の解は、 $x = \alpha$ 以外のすべての実数

③ $ax^2 + bx + c \leq 0$ の解は、 $x = \alpha$

④ $ax^2 + bx + c \geq 0$ の解は、すべての実数

(3) 判別式 $D = b^2 - 4ac < 0$ のとき

- ① $ax^2 + bx + c < 0$ の解は、ない
- ② $ax^2 + bx + c > 0$ の解は、すべての実数
- ③ $ax^2 + bx + c \leq 0$ の解は、ない
- ④ $ax^2 + bx + c \geq 0$ の解は、すべての実数

< 三角比 > (数 I)

値を決定できること、逆に角度を決定できること。

三角方程式・不等式を解けること。

(1) 相互関係

- ① $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- ② $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
- ③ $\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

(2) 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(R は、外接円の半径)

(3) 余弦定理 (2辺 b, c と挟む角 A)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

3辺から角を求める時、余弦定理を変形して

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(4) 三角形の面積 (2辺 b, c と挟む角 A)

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

※ 内接円の半径 r を求めることへ応用される

$$S = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr \text{ より}$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

さらに、余裕があれば、以下のヘロンの公式も知っていると良い

$$\text{面積 } S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (s \text{ は三角形の周の半分})$$

(5) 球の体積と表面積 (中 3 へ)

$$\text{体積 } V = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad \text{表面積 } S = 4\pi r^2$$

(6) 相似な図形の面積比, 体積比 (中 3 へ)

相似比が $m:n$ である図形の面積比は、 $m^2:n^2$

相似比が $m:n$ である立体の表面積の比は、 $m^2:n^2$,
体積比は、 $m^3:n^3$

< データの分析 > (旧数B→数 I)

$$\text{平均値: } \bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n)$$

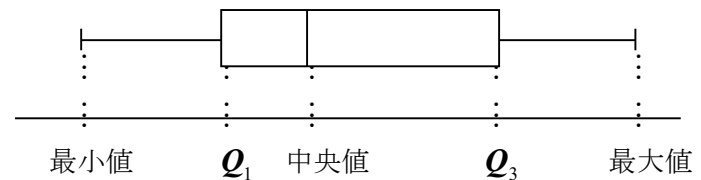
最頻値: 度数分布で最も度数が多い値

中央値 (メジアン): データを順番に並べたときの真ん中の値

(同立の場合は平均をとる)

< 箱髭図 (box plot図) >

データの散らばり具合を表す。データを昇順に並べて、4等分したもので表現する。下図の Q_1 : 第1四分位 Q_3 : 第3四分位



< 分散と標準偏差 > (旧数B→数 I)

分散:

$$s^2 = \frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{n-1} - \bar{x})^2 + (x_n - \bar{x})^2 \}$$

標準偏差: $s = \sqrt{\text{分散}}$

また、 $s^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ が成立する。

(分散は、二乗の平均から平均の二乗を引く)

< 相関係数 > (旧数B→数 I)

二つの変数 x, y に相関があるかを調べる

$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$ の総和を a

$(x - \bar{x})^2$ の総和を b

$(y - \bar{y})^2$ の総和を c

として、相関係数 $r = \frac{a}{\sqrt{bc}}$ ($-1 \leq r \leq 1$)

r が 1 に近い \Rightarrow 正の相関が強い

r が 0 に近い \Rightarrow 相関がない

r が -1 に近い \Rightarrow 負の相関が強い

<平面図形> (数A)

(1) 三角形の成立条件

三角形の3辺の長さが a, b, c のとき、 $|a-b| < c < a+b$ が成

り立つ。

(2) 三角形の5心

- ① $\triangle ABC$ の3辺の垂直二等分線は1点O (外心) で交わる。
外心は外接円の中心である。
- ② $\triangle ABC$ の各頂点から対辺に下ろした3つの垂線は
1点H (垂心) で交わる。
- ③ $\triangle ABC$ の3つの内角の二等分線は1点I (内心)
で交わる。内心は内接円の中心である。
- ④ $\triangle ABC$ の3つの中線は1点G (重心) で交わる。
重心は中線を2:1の比に内分する。
- ④ $\triangle ABC$ の1つの内角の二等分線と他の2つの頂点に
おける外角の二等分線は1点(傍心)で交わる(3つある)。
傍心は傍接円の中心である。

(3) 円周角 (一部中3へ)

- ① 同じ弧に対する円周角は等しい。
- ② 円周角は中心角の半分である。
- ③ 直径に対する円周角は直角である。
- ④ 円周角の定理の逆

4点A, B, P, Qについて、P, Qが直線ABに
対して同じ側にあつて、 $\angle APB = \angle AQB$ ならば
この4点は同一円周上にある。

(4) 円に内接する四角形

- ① 内接四角形 \Leftrightarrow 向かい合う内角の和は 180° である。
- ② 内接四角形 \Leftrightarrow 1つの内角は向かい合う角の外角に等しい。

(5) 接弦定理

ATが点Aにおける円の接線ならば

$$\angle BAT = \angle APB$$

(注) 逆も成り立つ。

$\angle BAT = \angle APB$ ならば、ATは点Aに
おける円の接線である。

(6) 方べきの定理

- ① 点Pを通る2直線が円と点A, Bおよび
C, Dで交わるとき (図1, 2)

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

- ② 円の弦ABの延長上の点Pから、円に
引いた接線をPTとするとき (図3)

$$PA \cdot PB = PT^2$$

(注) 方べきの定理は逆も成り立つ。

※ 2つの円の位置関係、共通接線についても確認しておく。

※ 定規とコンパスを用いての作図は中学で学習したものを確認
しておく。(中学から)

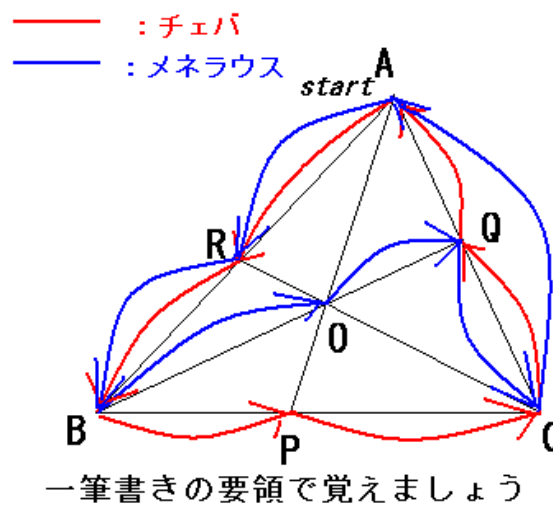
下図のように $\triangle ABC$ において、辺BC, CA, AB上またはその
延長上にそれぞれP, Q, Rがあり、AP, BQ, CRが1点Oで
交わるとき

(7) チェバの定理

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

(8) メネラウスの定理

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BO}{OQ} \cdot \frac{QC}{CA} = 1$$



<空間図形> (数A)

空間における平面や直線の位置関係

- ・平行な直線の一方に垂直な直線は他方とも垂直
- ・平面上の交わる2直線に垂直な直線は、この平面と垂直
- ・平面と垂直な直線を含む平面は元の平面と垂直

<凸多面体> (数A)

オイラーの多面体定理

凸多面体の頂点の数を v 、辺の数を e 、面の数を f とすると
 $v - e + f = 2$ が成立する

<整数の性質> (数A)

倍数・約数・最大公約数・最小公倍数

a, b の最大公約数 G 、最小公倍数 l として

$a = Ga', b = Gb'$ ならば

- ・ a', b' は互いに素
- ・ 最小公倍数: $l = Ga'b'$
- ・ $ab = Gl$ さらに $G = 1$ ならば最小公倍数 $l = ab$

<倍数の判定法> (数A)

2の倍数: 一位の位が0, 2, 4, 6, 8

3の倍数: 各位の数の和が3の倍数

4の倍数: 下二桁が4の倍数

5の倍数: 一位の位が0, 5

9の倍数: 各位の数の和が9の倍数

連続する2整数の積は2の倍数

連続する3整数の積は6の倍数

<整数の分類 (場合分け) > (数A)

a を b で割った商を q 余り r として

$a = bq + r$ ($0 \leq r < b$)と一意に定まる。

① 2で割った余りで分類⇒全整数を $n = 2k$ と $n = 2k + 1$ に分類

② 3で割った余りで分類⇒全整数を $n = 3k$ と $n = 3k + 1$ と $n = 3k + 2$ に分類

③ 一般に m で割った余りで分類⇒全整数を

$n = mk$ と $n = mk + 1$ と $n = mk + 2 \dots n = mk + (m - 1)$

に分類

<約数の個数> (数A)

N を素因数分解して、 $N = p^a q^b r^c \dots$

正の約数の個数は、 $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \dots$

<ユークリッドの互除法> (旧数B→数A)

最大公約数の求め方

a を b で割ったとき、余り r として

a と b の最大公約数は、 b と r_0 の最大公約数であることを用いる

【手順1】 a を b で割る

【手順2】余り $r_0 = 0$ なら終了 最大公約数は b

【手順3】 $r_0 > 0$ なら b を r_0 で割る

【手順4】余り $r_1 = 0$ なら終了 最大公約数は r_0

以下繰り返し

<分数の性質> (数A)

$\frac{m}{n}$ が既約分数のとき

分母 n の素因数が2or5ならば有限小数

分母 n の素因数が2or5以外を含むならば循環小数

<n進法> (数A)

n 進法で表された数 $abcde$ は、十進法で表すと

$$a \times n^4 + b \times n^3 + c \times n^2 + d \times n + e$$

また、十進法で表された数を n 進法表示するには、 n で割った余りを求め1位の位が決定、さらに n で割った余りを求めて2位の位が決定というように繰り返せばよい。

<個数の処理> (数A)

基本的には樹形図で数え上げる

その他の方法として、

順列： ${}_n P_r$

組合せ： ${}_n C_r$

重複順列： n^r

同じものを含む順列： $\frac{n!}{p!q!r!\dots}$

重複組合せ： ${}_n H_r = {}_{n+r-1} C_r$

円順列： $(n-1)!$

組分けについて…同じ数ずつに分けると、A, B, Cのような区別があるかないか注意

<確率> (数A)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

余事象の確率

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

加法定理 (場合分け)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

注意：背反ではない場合は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

事象Aが起こるが、事象Bが起こらない確率

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

独立試行の確率 (引き続き起こる)

$$P(C) = P(A)P(B)$$

反復試行の確率

$${}_n C_r p^r q^{n-r} \quad \text{ここで、} q = 1 - p$$

<条件付き確率> (旧数C→数A)

事象Aが起こったときの、事象Bが起こる確率

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

したがって、乗法定理

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) \text{ を得る}$$

