

代数・幾何

<ベクトル>

① ベクトルの演算

和・差・実数倍については、文字の計算と同様

② ベクトルの成分表示

$$\text{平面ベクトル: } \vec{a} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 = (x_1, y_1)$$

$$\text{空間ベクトル: } \vec{a} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3 = (x_1, y_1, z_1)$$

成分での計算ができるようにすること

③ ベクトルの内積: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

平面ベクトル:

$$\vec{a} = (x_1, y_1) \quad \vec{b} = (x_2, y_2) \text{ のとき, } \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

空間ベクトル:

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \text{ のとき}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

④ ベクトルの大きさ

$$\text{平面上: } |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\text{空間上: } |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} \text{ は、良く用いられる。}$$

⑤ m : n に分ける点: $\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$

⑥ 図形への応用 (空間ベクトルも同様である)

図形問題を解く上では、各点の位置ベクトル

$A(\vec{a}), B(\vec{b}), \dots (\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \dots)$ を用いるが、始点

をある点にした方が良く判断した場合は、例えば、

$$\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b} \dots \text{等とおいて解答することも良くある。}$$

次のものは常識である。

$$\cdot \text{中点: } \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

$$\cdot \text{三角形の重心: } \vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$\cdot \text{平行条件: } \vec{a} = t\vec{b} \quad (t:\text{実数})$$

$$\cdot \text{垂直条件: } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\cdot \text{一直線上にある条件: } \vec{AB} = t\vec{AC} \quad (t:\text{実数})$$

$$\cdot \text{なす角を求める: } \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{ から } \theta \text{ を決定}$$

・ ベクトル方程式

直線のベクトル方程式は

$$(1) \text{ 1点 } \vec{a} \text{ と方向ベクトル } \vec{d} : \vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \quad (t:\text{実数})$$

$$(2) \text{ 2点 } \vec{a}, \vec{b} \text{ を通る: } \vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \quad (t:\text{実数})$$

(3) 角の二等分線

$$\vec{p} = t \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

平面のベクトル方程式 (平面 ABC 上に点 P が存在)

$$(1) \vec{AP} = s\vec{AB} + t\vec{AC} \quad (\text{実数 } s, t \text{ の存在})$$

$$(2) \vec{p} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \quad (r+s+t=1)$$

円・球面について、ベクトル方程式: $|\vec{p} - \vec{a}| = r$

(1) 平面上では、円

(2) 空間上では、球面

成分表示した場合は、それぞれの方程式は

$$\text{円: } (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\text{球面: } (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

注) 交点を求めるには上記のベクトル方程式で、各座標 (成分) を媒介変数表示して求める。

直線・平面について、ベクトル方程式: $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ は、

(1) 平面上では、直線

(2) 空間上では、平面

<行列の演算>

和、差、実数倍に関しては、各 i 行 j 列目にある成分で、和、差、実数倍をすれば良い。したがって、 i 行 j 列の型が同じ ($i \times j$ 型同士) でないと演算は不可である。掛け算については、 $i \times j$ 型と $j \times k$ 型が演算可能で、計算結果は $i \times k$ 型となる。

特に、次の形の場合が多い。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

n 個の行列 A を掛けたものは、 $AAA \dots AA = A^n$ と書く。

また、一般には、 $AB \neq BA$ で、交換法則は不成立である。

実数の掛け算での 1 と同様に、単位行列 E が存在し、左から掛け

でも右から掛けても変わらない。 $EA = AE = A$ である。

$$2 \times 2 \text{ 型のときの単位行列は } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また、全ての成分が 0 の行列を零行列と呼び、零行列 O については、実数の 0 と同様に $AO = OA = O$

ただし、 $A \neq O, B \neq O$ であっても $AB = O$ となることがある。

(つまり、実数とは違い、零因子の存在に注意する。)

$$2 \times 2 \text{ 型のときの零行列は、 } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

割り算については、実数で逆数を掛けることにより計算するのと同様に、逆行列 A^{-1} を掛けることにより演算を行う。

逆行列とは、掛けたときに単位行列 E になる行列であり、これは実数で、掛けて 1 になる数を逆数と呼ぶのと同じである。

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

特に、 2×2 型のときの逆行列は、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ただし、 $\Delta = ad - cb \neq 0$

もし、 $\Delta = ad - cb = 0$ ならば逆行列は存在しない。

(実数 0 に逆数が存在しないのと同様である。)

n 個の行列 A を掛けたものは、 $AAA \cdots AA = A^n$ と書く。

<ケーリー・ハミルトンの公式>

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ のとき、}$$

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O \text{ が成立する。}$$

これは、 A^n の次数を下げて計算する場合に良く使われる。

<逆行列の利用>

A^{-1} が存在するならば、一次方程式と同様に、

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow EX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

または

$$XA = B \rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \rightarrow XE = BA^{-1} \rightarrow X = BA^{-1}$$

と変形ができる。

上記のことを利用すれば、連立 2 元 1 次方程式

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

を行列を用いて解くことができる。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ とおけば}$$

$$\text{連立 2 元 1 次方程式は、} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \text{ つまり}$$

$$AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow EX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\text{だから、} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ を計算すれば良い。}$$

<行列の基本変形>

- ① 二つの行を入れ替える
- ② ある行に 0 でない実数を掛ける

③ ある行に他の行の実数倍を加える

注) 連立 2 元 1 次方程式は行列の基本変形で消去法を用いても求めることができる。

$$AX = B \rightarrow A, B \text{ を基本変形して } EX = Q \text{ の形にすれば}$$
$$\text{解は } X = Q$$

<1 次変換>

点 (x, y) を点 (x', y') に移す

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

<原点を中心として回転>

点 (x, y) を θ 回転して点 (x', y') に移す

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

<原点を中心として拡大・縮小>

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{倍率: } k$$

<1 次変換の性質>

- ① 直線を直線に移す
- ② 分点は同じ比の分点に移す
- ③ 図形の内部は内部に移す
- ④ 面積について $\Delta = ad - cb$ 倍になる

<固有値の求め方> (発展)

行列 A において $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす実数 λ を固有値、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を固有ベクトルという

有ベクトルという

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ から、} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ と変形して、単位行列}$$

$$\text{を } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ とすると}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore (A - \lambda E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで行列 $(A - \lambda E)$ が逆行列をもつと $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (自明な解) に

なってしまうので、行列 $(A - \lambda E)$ が逆行列を持たない条件を用いる

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{の} \quad \text{と} \quad \text{き}$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \text{ と変形して}$$

$\Delta = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$ である。

この λ についての 2 次方程式 (固有方程式) を解いて、固有値 λ_1 と λ_2 が求まる。

<固有ベクトルの求め方>

$$\begin{pmatrix} a-\lambda_1 & b \\ c & d-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{から、不定な解} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-\lambda_2 & b \\ c & d-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{から、不定な解} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

が求める固有ベクトルである

ここで t は任意の実数なので実際には平行なベクトルが無数に存在していることが分かる。

<行列の対角化の方法>

各固有ベクトルから作った行列 $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$ のとき P の逆行列

$$P^{-1} \text{を用いて、} B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{となる}$$

この両辺の左から P 、右から逆行列 P^{-1} をかけると

$$PBP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$$

$$\therefore A = PBP^{-1} \text{ とかける}$$

これを行列 A の対角化と呼ぶ

<対角化された行列の n 乗>

$$A = PBP^{-1} \text{ のとき}$$

$$A^2 = (PBP^{-1})^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PBP^{-1}PBP^{-1} = PBEBP^{-1} = PB^2P^{-1}$$

$$A^3 = (PBP^{-1})^3 = (PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PBP^{-1}PBP^{-1}PBP^{-1} = PBE BEBP^{-1} = PB^3P^{-1}$$

$$\text{これを繰り返せば } A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1}$$

(証明は数学的帰納法により明らか)

また固有値を用いて、 $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ であれば

$$B^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 \end{pmatrix} E_3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \text{である}$$

これを繰り返せば $B^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ となる

(証明は数学的帰納法により明らか)

したがって $A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$ で計算できることになる

使用例：連立漸化式の解法

$$\begin{matrix} a_{n+1} = aa_n + bb_n \\ b_{n+1} = ca_n + db_n \end{matrix} \text{は} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \text{ とかけるので}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ b_{n-3} \end{pmatrix} = \dots$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\therefore \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \text{ となり}$$

a_{n+1} と b_{n+1} が n の式で表される

このとき固有値と固有ベクトルから対角化された行列の n 乗を具体的に求めておき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1} \text{ を用いて計算すれば良い}$$

a_{n+1} と b_{n+1} の式を a_n と b_n に変えれば、一般項 a_n と b_n を求めることができる

<単位行列>

一般に、右からかけても左からかけても変わらない

$$EA = AE = A$$

$$\text{例 } E_3 = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

$$AE_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

n 次の単位行列は、対角線が 1、その他は 0 の形

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

<空間図形>

(1) 2点間の距離 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ のとき

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

(2) 分点の座標 $m : n$ に分ける点

$A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ のとき、線分 AB を $m : n$ に分ける点

$$\text{は、} \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}, \frac{nz_1 + mz_2}{m+n} \right)$$

注) $mn < 0$ のとき外分点となる

(3) 図形の方程式

・空間上で点 (a, b, c) を通り、方向ベクトル $\vec{d} = (l, m, n)$ の直線

$$\text{直線の方程式: } \frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

・空間上で2点 $(a, b, c), (d, e, f)$ を通る直線

$$\text{直線の方程式: } \frac{x-a}{d-a} = \frac{y-b}{e-b} = \frac{z-c}{f-c}$$

・空間上で点 (a, b, c) を通り、法線ベクトル $\vec{n} = (p, q, r)$ の平面

$$\text{平面の方程式: } p(x-a) + q(y-b) + r(z-c) = 0$$

・空間上で、中心 (a, b, c) で、半径 r の球面

$$\text{球面の方程式: } (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

・原点を中心とした球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面の方程式は $x_0x + y_0y + z_0z = r^2$

(4) 点と平面の距離

・点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ の距離 D は

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

使用例 点 $(2, 4, 6)$ と平面 $x + y + z - 6 = 0$ の距離 D は

$$D = \frac{|2 + 4 + 6 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

【相互関係から重要参考例】

(1) 直線と図形の交点を求め方

単純に連立方程式を解くと計算が複雑になるので工夫して見よう。

$$\text{直線: } x-1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{平面: } x + y + z = 12 \dots \textcircled{2}$$

$$\text{球面: } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14 \dots \textcircled{3}$$

上記のとき

①の直線を媒介変数表示に直すと

$$x-1 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3} = t \text{ とおけば}$$

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \dots \star \\ z = 3+3t \end{cases}$$

となる。つまり、点 $(1+t, 2+2t, 3+3t)$

が図形上にあるとしてやれば、実際に t の値がいくつのときかを求めることができる。

平面との交点

・点 $(1+t, 2+2t, 3+3t)$ が平面上にあるので②に代入して

$$(1+t) + (2+2t) + (3+3t) = 12$$

$$6 + 6t = 12 \quad \therefore t = 1$$

点 $(1+t, 2+2t, 3+3t)$ に代入して、求める交点は $(2, 4, 6)$ となる。

球面との交点

・点 $(1+t, 2+2t, 3+3t)$ が球面上にあるので③に代入して

$$(1+t-1)^2 + (2+2t-2)^2 + (3+3t-3)^2 = 14$$

$$t^2 + 4t^2 + 9t^2 = 14 \quad \therefore t^2 = 1 \quad \therefore t = \pm 1$$

点 $(1+t, 2+2t, 3+3t)$ に、それぞれ代入して、

求める交点は $(2, 4, 6)$ と $(0, 0, 0)$ となる。

(2) 2平面の交線の求め方

$$\text{平面: } x + 2y - 5z = 3 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{平面: } 3x - y + z = -5 \dots \textcircled{2}$$

x, y, z で2文字ごとの関係式を出せば良いので、

①②より1文字消去する。例えば②×2+①を作り、 y を消去し

$$\text{て、} x \text{ と } z \text{ の関係は、} 7x - 3z = -7 \text{ から } z = \frac{7}{3}(x+1)$$

$$\text{同様に、} \textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \text{ から } z = \frac{7}{16}(y-2)$$

$$\text{従って、求める交線は、直線 } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{16} = \frac{z}{7} \text{ である。}$$

(3) 平面と直線のなす角の求め方

$$\text{直線: } \frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{-4} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{平面: } 5x - 4y - 3z = 10 \dots \textcircled{2}$$

① と②のなす角を求めよう。

直線方向ベクトル $\vec{d} = (5, 3, -4)$ で、

平面の法線ベクトル $\vec{n} = (5, -4, -3)$ である。

まず \vec{d} と \vec{n} のなす角 θ を求める。

$$\cos \theta = \frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{5 \times 5 + 3 \times (-4) + (-4) \times (-3)}{\sqrt{5^2 + 3^2 + (-4)^2} \sqrt{5^2 + (-4)^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \theta = 60^\circ$ 法線ベクトルは、平面に対して 90° の角だから、求める角は $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ である。

(4) 3点を通る平面の求め方

3点 $(2, -1, 1), (2, 1, 3), (1, 1, -1)$ を通る平面を求めるには、求める平面を $ax + by + cz + d = 0$ とおき、上の各点を代入することにより、3関係式ができる。

$$\begin{cases} 2a - b + c + d = 0 \dots \textcircled{1} \\ 2a + b + 3c + d = 0 \dots \textcircled{2} \\ a + b - c + d = 0 \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

①②③から a, b, c を d を用いて表すと、(d を定数扱いして解く)

$$a = -\frac{2}{3}d \quad b = -\frac{1}{6}d \quad c = \frac{1}{6}d$$

$$\text{よって平面は、} -\frac{2}{3}dx - \frac{1}{6}dy + \frac{1}{6}dz + d = 0$$

両辺を $-\frac{6}{d}$ 倍して整理して、($d \neq 0$)

$$\text{求める平面は、} 4x + y - z - 6 = 0$$

< 2次曲線 >

e を離心率とする

① 円 : $x^2 + y^2 = r^2$ 焦点 $(0,0)$ 準線なし

② 楕円 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 焦点 $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ 準線 $x = \pm \frac{a}{e}$

③ 双曲線 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 焦点 $(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ 準線 $x = \pm \frac{a}{e}$

④ 放物線 : $y^2 = 4px$ 焦点 $(p, 0)$ 準線 $x = -p$

注意 : 楕円での $a > b > 0$ と $b > a > 0$ の違い。双曲線での $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ 、放物線 $x^2 = 4py$ も、焦点、準線、どのような図形になるかを押さえておくこと。

< 2次曲線の接線 >

接点 (x_1, y_1) のとき

① 円 : $x^2 + y^2 = r^2 \rightarrow$ 接線 $x_1x + y_1y = r^2$

② 楕円 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow$ 接線 $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

③ 双曲線 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow$ 接線 $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$

④ 放物線 : $y^2 = 4px \rightarrow$ 接線 $y_1y = 2p(x + x_1)$

接線の作り方を統一して覚えておこう。

< 2次曲線の平行移動 >

x 軸方向に x_1 、 y 軸方向に y_1 平行移動する

$$F(x, y) = 0 \rightarrow F(x - x_1, y - y_1) = 0$$

< 離心率 >

定点 F と定直線 g からの距離の比が $e:1$ と、一定である点 P の

軌跡は、① $0 < e < 1$ のとき楕円 離心率 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

② $e = 1$ のとき放物線 離心率 $e = 1$

③ $e > 1$ のとき双曲線 離心率 $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

[④ $e = 0$ のとき円]

定点 F と定直線 g に下ろした垂線の足を H とする。 $e = \frac{PF}{PH}$ を

離心率という

注) 焦点 F 、準線 g である

< 媒介変数表示 >

① 円 : $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

② 楕円 : $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$

③ 双曲線 : $x = \frac{a}{\cos \theta}, y = b \tan \theta$

④ サイクロイド : $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$

放物線 : $y^2 = 4px$ < 曲座標と曲方程式 >

直交座標 (x, y) と曲座標 (r, θ) の関係

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad x^2 + y^2 = r^2$$

特に、曲方程式 $r = f(\theta)$ で表される曲線は、

$$x = f(\theta) \cos \theta, y = f(\theta) \sin \theta \text{ である。}$$

良くある曲方程式

① 中心 (r_0, θ_0) 、半径 a の円 : $r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) = a^2$

注) 左辺は、2点 (r, θ) (r_0, θ_0) 間の距離を表す

② 極 O を通り、始線 OX となす角が α である直線 : $\theta = \alpha$

③ 点 $A(a, \alpha)$ を通り、 OA に垂直な直線 : $r \cos(\theta - \alpha) = a$
($a > 0$)

< 色々な曲線 >

① カーゴイド (心臓形) : $r = a(1 + \cos \theta)$

② アルキメデスの渦巻き線 : $r = a\theta$

③ 正葉曲線 : $r = \sin a\theta$

④ リマソン (蝸牛線) : $r = a + b \cos \theta$

⑤ レムニスケート : $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$

