数学ⅡB

＜公理＞

公理を論拠に定義を用いて定理を証明する

① 大小関係の公理

・順序（a > b, a = b, a > b 1つ成立 a > b, b > c ⇒ a > c成立）

・順序と演算(a > b ⇒ a + c > b + c （a > b, c > 0 ⇒ ac > bc）

② 図形の公理

・平行線の性質（錯角、同位角）

・三角形の合同条件

・三角形の合同相似

③ 量の公理

・角の大きさ

・線分の長さ

＜空間における座漂とベクトル＞

① ベクトルの演算

和・差・実数倍については、文字の計算と同様

② ベクトルの成分表示

平面ベクトル：$\vec{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2} = (x_1, y_1)$

空間ベクトル：$\vec{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2} + z_1\overrightarrow{e_3} = (x_1, y_1, z_1)$

成分での計算ができるようにすること

③ ベクトルの内積：$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

平面ベクトル：

$\vec{a} = (x_1, y_1)$ $\vec{b} = (x_2, y_2)$ のとき、$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

空間ベクトル：

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ のとき

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

④ ベクトルの大きさ

平面上：$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

空間上：$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ は、良く用いられる。

⑤ m：nに分ける点： $\vec{p} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$

⑥ 図形への応用（空間ベクトルも同様である）

図形問題を解く上では、各点の位置ベクトル

$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$,・・・（$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$,・・・）を用いるが、始点をある点にした方が良いと判断した場合は、例えば、$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$・・・等とおいて解答することも良くある。

次のものは常識である。

・中点：$\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

・三角形の重心：$\vec{g} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

・平行条件：$\vec{a} = t\vec{b}$ （t：実数）

・垂直条件：$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

・一直線上にある条件：$\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$ （t：実数）

・ なす角を求める：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ からθを決定

・ ベクトル方程式

直線のベクトル方程式は

(1)1点$\vec{a}$と方向ベクトル$\vec{d}$ ：$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$ （t：実数）

(2)2点$\vec{a}$, $\vec{b}$ を通る：$\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ （t：実数）

(3)角の二等分線

$$\vec{p} = t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

平面のベクトル方程式（平面ABC上に点Pが存在）

(1) $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ （実数s, tの存在）

(2) $\vec{p} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ （$r + s + t = 1$）

円・球面について、ベクトル方程式：$|\vec{p} - \vec{a}| = r$

(1)平面上では、円

(2)空間上では、球面

成分表示した場合は、それぞれの方程式は

円：$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

球面：$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

注）交点を求めるには上記のベクトル方程式で、各座標（成分）を媒介変数表示して求める。

直線・平面について、ベクトル方程式：$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ は、

(1)平面上では、直線

(2)空間上では、平面

＜空間図形＞

（1） 2点間の距離 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ のとき

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)}$$

(2) 分点の座標　$m:n$ に分ける点

$A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ のとき、線分 AB を $m:n$ に分ける点は、$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}, \dfrac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$

注）$mn<0$ のとき外分点となる

(3) 図形の方程式

・空間上で点(a,b,c)を通り、方向ベクトル$\vec{d}=(l,m,n)$の直線

直線の方程式：$\dfrac{x-a}{l}=\dfrac{y-b}{m}=\dfrac{z-c}{n}$

・空間上で２点$(a,b,c)(d,e,f)$を通る直線

直線の方程式：$\dfrac{x-a}{d-a}=\dfrac{y-b}{e-b}=\dfrac{z-c}{f-c}$

・空間上で点(a,b,c)を通り、法線ベクトル$\vec{n}=(p,q,r)$の平面

平面の方程式：$p(x-a)+q(y-b)+r(z-c)=0$

・空間上で、中心(a,b,c)で、半径rの球面

球面の方程式：$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

・原点を中心とした球面$x^2+y^2+z^2=r^2$の点(x_0,y_0,z_0)における接平面の方程式は$x_0x+y_0y+z_0z=r^2$

(4) 点と平面の距離

・点(x_1,y_1,z_1) と平面 $ax+by+cz+d=0$ の距離 D は

$D=\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ で求められる。

使用例　点$(2,4,6)$と平面：$x+y+z-6=0$ の距離 D は

$$D=\frac{|2+4+6-6|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

【相互関係から重要参考例】

(1) 直線と図形の交点を求め方

単純に連立方程式を解くと計算が複雑になるので工夫して見よう。

直線：$x-1=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ ・・・①

平面：$x+y+z=12$ ・・・・・・②

球面：$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$ ・・・③

上記のとき

①の直線を媒介変数表示に直すと

$x-1=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}=t$ とおけば

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \quad \cdots ★ \\ z=3+3t \end{cases}$$

となる。つまり、点$(1+t,\ 2+2t,\ 3+3t)$が図形上にあるとしてやれば、実際に t の値がいくつのときかを求めることができる。

<u>平面との交点</u>

・点$(1+t,\ 2+2t,\ 3+3t)$が平面上にあるので②に代入して

$(1+t)+(2+2t)+(3+3t)=12$

$6+6t=12 \quad \therefore t=1$

点$(1+t,\ 2+2t,\ 3+3t)$に代入して、求める交点は$(2,4,6)$となる。

<u>球面との交点</u>

・点$(1+t,\ 2+2t,\ 3+3t)$が球面上にあるので③に代入して

$(1+t-1)^2+(2+2t-2)^2+(3+3t-3)^2=14$

$t^2+4t^2+9t^2=14 \quad \therefore t^2=1 \quad \therefore t=\pm1$

点$(1+t,\ 2+2t,\ 3+3t)$に、それぞれ代入して、

求める交点は$(2,4,6)$と$(0,0,0)$となる。

(2) ２平面の交線の求め方

平面：$x+2y-5z=3$ ・・・・・・①

平面：$3x-y+z=-5$ ・・・・・・②

x,y,z で２文字ごとの関係式を出せば良いので、

①②より１文字消去する。例えば②×２＋①を作り、y を消去して、x と z の関係は、$7x-3z=-7$ から $z=\dfrac{7}{3}(x+1)$

同様に、①×３―②から $z=\dfrac{7}{16}(y-2)$

従って、求める交線は、直線 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{16}=\dfrac{z}{7}$ である。

(3) 平面と直線のなす角の求め方

直線：$\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{-4}$ ・・・①

平面：$5x-4y-3z=10$ ・・・・・②

① と②のなす角を求めよう。

直線の方向ベクトル $\vec{d}=(5,3,-4)$ で、

平面の法線ベクトル $\vec{n}=(5,-4,-3)$ である。

まず $\vec{d}$ と $\vec{n}$ のなす角 θ を求める。

$$\cos\theta=\frac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{|\vec{d}||\vec{n}|}=\frac{5\times5+3\times(-4)+(-4)\times(-3)}{\sqrt{5^2+3^2+(-4)^2}\sqrt{5^2+(-4)^2+(-3)^2}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta=60^\circ$　法線ベクトルは、平面に対して90°の角だから、求める角は$90^\circ-60^\circ=30^\circ$である。

(4) ３点を通る平面の求め方

３点$(2,-1,1)$ $(2,1,3)$ $(1,1,-1)$を通る平面を求めるには、

求める平面を $ax+by+cz+d=0$ とおき、上の各点を代入することにより、３関係式ができる。

$$\begin{cases} 2a-b+c+d=0 \cdots ① \\ 2a+b+3c+d=0 \cdots ② \\ a+b-c+d=0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①②③から a,b,c を d を用いて表すと、（d を定数扱いして解く）

$a=-\frac{2}{3}d \quad b=-\frac{1}{6}d \quad c=\frac{1}{6}d$

よって平面は、$-\frac{2}{3}dx-\frac{1}{6}dy+\frac{1}{6}dz+d=0$

両辺を$-\frac{6}{d}$倍して整理して、（$d\neq 0$）

求める平面は、$4x+y-z-6=0$

＜行列＞

和、差、実数倍に関しては、各 i 行 j 列目にある成分で、和、差、実数倍をすれば良い。したがって、i 行 j 列の型が同じ（i×j 型同士）でないと演算は不可である。掛け算については、i×j 型と j×k 型が演算可能で、計算結果は i×k 型となる。

特に、次の形の場合が多い。

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=ac+bd \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

n個の行列Aを掛けたものは、$AAA\cdots AA=A^n$と書く。

また、一般には、$AB\neq BA$で、交換法則は不成立である。

実数の掛け算での１と同様に、単位行列Eが存在し、左から掛けても右から掛けても変わらない。$EA=AE=A$である。

２×２型のときの単位行列は$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

また、全ての成分が０の行列を零行列と呼び、零行列０については、実数の０と同様に$AO=OA=O$

ただし、$A\neq O, B\neq O$であっても$AB=O$となることがある。

（つまり、実数とは違い、零因子の存在に注意する。）

２×２型のときの零行列は、$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

割り算については、実数で逆数を掛けることにより計算するのと同様に、逆行列A^{-1}を掛けることにより演算を行う。

逆行列とは、掛けたときに単位行列Eになる行列であり、これは実数で、掛けて１になる数を逆数と呼ぶのと同じである。

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$

特に、２×２型のときの逆行列は、

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ただし、$\Delta=ad-cb\neq 0$

もし、$\Delta=ad-cb=0$ならば逆行列は存在しない。

（実数０に逆数が存在しないのと同様である。）

n個の行列Aを掛けたものは、$AAA\cdots AA=A^n$と書く。

＜ケーリー・ハミルトンの公式＞

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$のとき、

$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$が成立する。

これは、A^nの次数を下げて計算する場合に良く使われる。

＜逆行列の利用＞

A^{-1}が存在するならば、一次方程式と同様に、

$AX=B\rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\rightarrow EX=A^{-1}B\rightarrow X=A^{-1}B$

または

$XA=B\rightarrow XAA^{-1}=BA^{-1}\rightarrow XE=BA^{-1}\rightarrow X=BA^{-1}$

と変形ができる。

上記のことを利用すれば、連立２元１次方程式

$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ p

を行列を用いて解くことができる。

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$　とおけば

連立２元１次方程式は、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$、つまり

$AX=B\rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B\rightarrow EX=A^{-1}B\rightarrow X=A^{-1}B$

だから、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$を計算すれば良い。

＜行列の基本変形＞

①二つの行を入れ替える

②ある行に０でない実数を掛ける

③ある行に他の行の実数倍を加える

注）連立２元１次方程式は行列の基本変形で消去法を用いても求めることができる。

$AX=B\rightarrow A,B$を基本変形して$EX=Q$の形にすれば

解は$X=Q$

＜１次変換＞

点$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$を点$(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')$に移す

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

＜原点を中心として回転＞

点$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$を$\boldsymbol{\theta}$回転して点$(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')$に移す

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\boldsymbol{\theta} & -\sin\boldsymbol{\theta} \\ \sin\boldsymbol{\theta} & \cos\boldsymbol{\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

＜原点を中心として拡大・縮小＞

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$　倍率：$\boldsymbol{k}$

＜１次変換の性質＞

①　直線を直線に移す

②　分点は同じ比の分点に移す

③　図形の内部は内部に移す

④　面積について$\Delta=\boldsymbol{ad}-\boldsymbol{cb}$倍になる

＜固有値の求め方＞（発展）

行列 A において $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を満たす実数 λ を固有値、$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を固有ベクトルという

$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ から、$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ と変形して、単位行列を $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ とすると

$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\lambda E\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad \therefore (A-\lambda E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

ここで行列 $(A-\lambda E)$ が逆行列をもつと $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$（自明な解）になってしまうので、行列 $(A-\lambda E)$ が逆行列を持たない条件を用いる

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ のとき

$A-\lambda E=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-\lambda&b\\c&d-\lambda\end{pmatrix}$ と変形して

$\Delta=(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$ である。

この λ についての2次方程式（固有方程式）を解いて、固有値 λ_1 と λ_2 が求まる。

＜固有ベクトルの求め方＞

$\begin{pmatrix}a-\lambda_1&b\\c&d-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ から、不定な解 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}p_1\\q_1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a-\lambda_2&b\\c&d-\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ から、不定な解 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}p_2\\q_2\end{pmatrix}$

が求める固有ベクトルである

ここで t は任意の実数なので実際には平行なベクトルが無数に存在していることが分かる。

＜行列の対角化の方法＞

各固有ベクトルから作った行列 $P=\begin{pmatrix}p_1&p_2\\q_1&q_2\end{pmatrix}$ のとき P の逆行列 P^{-1} を用いて、$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ となる

この両辺の左から P、右から逆行列 P^{-1} をかけると

$PBP^{-1}=PP^{-1}APP^{-1}=A$

$\therefore A=PBP^{1}$ とかける

これを行列 A の対角化と呼ぶ

＜対角化された行列のｎ乗＞

$A=PBP^{-1}$ のとき

$A^2=(PBP^{-1})^2=(PBP^{-1})(PBP^{-1})=PBP^{-1}PBP^{-1}=PBEBP^{-1}=PB^2P^{-1}$

$A^3=(PBP^{-1})^3=(PBP^{-1})(PBP^{-1})(PBP^{-1})$

$=PBP^{-1}PBP^{-1}PBP^{-1}=PBEBEBP^{-1}=PB^3P^{-1}$

これを繰り返せば $A^n=(PBP^{-1})^n=PB^nP^{-1}$

（証明は数学的帰納法により明らか）

）

また固有値を用いて、$B=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ であれば

$B^2=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2&0\\0&\lambda_2^2\end{pmatrix}$

$B^3=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^2&0\\0&\lambda_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^3&0\\0&\lambda_2^3\end{pmatrix}$

これを繰り返せば $B^n==\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0\\0&\lambda_2^n\end{pmatrix}$ となる

（証明は数学的帰納法により明らか）

したがって $A^n=P\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0\\0&\lambda_2^n\end{pmatrix}P^{-1}$ で計算できることになる

使用例：連立漸化式の解法

$\begin{matrix}a_{n+1}=aa_n+bb_n\\b_{n+1}=ca_n+db_n\end{matrix}$ は $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}$ とかけるので

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}a_{n-2}\\b_{n-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^4\begin{pmatrix}a_{n-3}\\b_{n-3}\end{pmatrix}=\cdots$$

$$=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$$

なので

$\therefore\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$ となり

a_{n+1} と b_{n+1} がｎの式で表される

このとき固有値と固有ベクトルから対角化された行列のｎ乗を具体的に求めておき

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{n}=P\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0\\0&\lambda_2^n\end{pmatrix}P^{-1}$ を用いて計算すれば良い

a_{n+1} と b_{n+1} の式を a_n と b_n に変えれば、一般項 a_n と b_n を求めることができる

＜単位行列＞

一般に、右からかけても左からかけても変わらない

$EA=AE=A$

例　$E_3=(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ のとき

$$\boldsymbol{AE_3}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E_3A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_3} \end{pmatrix} \text{である}$$

n 次の単位行列は、対角線が 1、その他は 0 の形

$$\boldsymbol{E_n}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

＜二項定理＞

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n$$

パスカルの三角形を利用できること

$$\begin{array}{c} 1\ \ 1 \\ 1\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\ 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 \\ 1\ \ 5\ \ 10\ \ 10\ \ 5\ \ 1 \\ 1\ \ 6\ \ 15\ \ 20\ \ 15\ \ 6\ \ 1 \\ \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{c} {}_1C_1\ \ {}_1C_0 \\ {}_2C_0\ \ {}_2C_1\ \ {}_2C_2 \\ {}_3C_0\ \ {}_3C_1\ \ {}_3C_2\ \ {}_3C_3 \\ {}_4C_0\ \ {}_4C_1\ \ {}_4C_2\ \ {}_4C_3\ \ {}_4C_4 \\ {}_5C_0\ \ {}_5C_1\ \ {}_5C_2\ \ {}_5C_3\ \ {}_5C_4\ \ {}_5C_5 \\ {}_6C_0\ \ {}_6C_1\ \ {}_6C_2\ \ {}_6C_3\ \ {}_6C_4\ \ {}_6C_5\ \ {}_6C_6 \\ \vdots \end{array}$$

$${}_nC_i={}_{n-1}C_{i-1}+{}_{n-1}C_i$$

多項定理：$(a+b+c+\cdots)^n$ の展開式で、$a^pb^qc^r\ldots$ の係数は、

$\dfrac{n!}{p!q!r!\ldots}$ である。

＜数列＞

等差数列：$\boldsymbol{a_n=a+(n-1)d}$ $\quad S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

等比数列：$a_n=ar^{n-1}$ $\quad S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ $\quad (r\neq 1)$

数列の和の記号 $\sum$ について

①$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=n$

②$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

③$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

⑤$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{ar^{k-1}}=\frac{\boldsymbol{a(1-r^n)}}{\boldsymbol{1-r}}$

さらに余裕があれば、以下の公式も知っていると良い

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

階差数列：$a_{n+1}-a_n=b_n$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \quad (n\geq 2)$$

和と一般項の関係は

$$a_1=S_1 \quad a_n=S_n-S_{n-1} \quad (n\geq 2)$$

＜漸化式の解法＞

等差数列 $a_{n+1}-a_n=d$ や等比数列 $a_{n+1}=ra_n$ の利用

また、階差数列 $a_{n+1}-a_n=b_n$ の利用。

有名なものには、

$$a_{n+1}=pa_n+q \quad (p\neq 1)\to\alpha=p\alpha+q$$

を満たす α を用いて→ $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形すると

数列 $\{a_n-\alpha\}$ は、初項 $a_1-\alpha$ 公比 p の等比数列となるので、

$$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)\cdot p^{n-1}\to a_n=(a_1-\alpha)\cdot p^{n-1}+\alpha$$

与えられた漸化式が 2 項間のときは、上記の形が多く、両辺の対数、逆数をとったり、あるもので割り算することにより

$a_{n+1}=pa_n+q \quad (p\neq 1)$ の形に変形できる。

与えられた漸化式が 3 項間のときは、

$\boldsymbol{pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n}=0$ の型になるもの

特性方程式：$px^2+qx+r=0$ の解で分類する。

2 解が α,β のとき

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ と $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$

と変形できる。

＜数学的帰納法＞

自然数に関するある命題を証明する方法

（Ⅰ）ある命題で、n=1 のときに成立することを示す。

（Ⅱ）ある命題で、n=k のとき成立を仮定して、n=k+1 のときも成立することを示す。

以上、（Ⅰ）（Ⅱ）より、すべての自然数についてある命題が成立することが証明される。

＜微分法＞

① 平均変化率　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

② 微分係数　$f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

③ 関数の極限　$\lim_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ で、$\lim_{x\to\alpha}g(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to\alpha}f(x)=0$

④ 接線・法線

曲線 $y=f(x)$ 上の $x=a$ における接線の方程式は、

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

曲線 $y=f(x)$ 上の $x=a$ における法線の方程式は、

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

⑤ 導関数の定義

定義： $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$y=c \Rightarrow y'=0$　　$y=x^n \Rightarrow y'=nx^{n-1}$

⑥ 関数のグラフ

$f'(x)=0$ を満たす x を定義域内で調べ、増減表を作る

極大・極小・ y 切片となる点に注意して描くが、場合によっては

$f(x)=0$ の解を求めて x 切片も得る。

⑦ 最大・最小

定義域に注意して、増減表から判断する。

⑧ 方程式・不等式への応用

グラフと直線との交点または上下関係を調べればよい。

・ $f(x)=a \Rightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=a \end{cases}$　交点等を調べる

・ $f(x)>g(x) \Rightarrow F(x)=f(x)-g(x)$ のグラフで調べる

（増減表のみで対応することもできる）

＜積分法＞

① 不定積分　$\int f(x)dx=F(x)+C$　（C ：積分定数）

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

② 定積分　$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

性質：(1) $\int_a^a f(x)dx=0$

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

(4) $\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx$

(5) $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & (f(x):\text{偶関数}) \\ 0 & (f(x):\text{奇関数}) \end{cases}$

(6) $f(x) \geqq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$

③ 微分と定積分　$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

④ ２曲線に囲まれた部分の面積

$S=\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}dx$

特に、α,β が、方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解ならば

$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx=-\dfrac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$

⑤ 体積

切り口の面積が、$S(x)$ のときは $V=\int_\alpha^\beta S(x)dx$

$V=\pi\int_\alpha^\beta \{f(x)\}^2 dx$　（回転体の体積）

＜速度・加速度・点の位置＞

時刻 t の関数として、点の位置が $s=s(t)$ のとき

$\underset{\text{点の位置}}{s(t)} \xrightarrow{\text{微分}} \underset{\text{速度}}{v(t)} \xrightarrow{\text{微分}} \underset{\text{加速度}}{a(t)}$

計算上は、$s'(t)=v(t), s''(t)=a(t)$

逆に考えて、 $\underset{\text{加速度}}{a(t)} \xrightarrow{\text{積分}} \underset{\text{速度}}{v(t)} \xrightarrow{\text{積分}} \underset{\text{点の位置}}{s(t)}$

計算上は、$s(t)=\int_a^t v(t)dt+s(a)$ 、$v(t)=\int_a^t a(t)dt+v(a)$

注）平面運動のときは、ベクトルとして扱う。

速度ベクトル $\vec{v}=(v_x(t),v_y(t))$

加速度ベクトル $\vec{a}=(a_x(t),a_y(t))$

注）速さはベクトルの大きさ $|\vec{v}|$ である。

＜道のり＞

$l=\int_a^t |v(t)|dt$