数学Ⅰ

＜式の計算＞

（１）指数法則

①$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

②$(a^m)^n = a^{mn}$

③$(ab)^n = a^n b^n$

（２）因数分解・乗法公式

①$acx^2 + (ad+cd)x + bd = (ax+b)(cx+d)$　（いわゆる、たすき掛け）

②$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

③$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

④$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

⑤$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2$

⑥$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

上記の複号は同順である

余裕があれば、以下の公式も知っていると良い

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

[良くある式の変形]

①$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

②$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

③$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

[因数分解の一般的解法]

①　ある文字について整理する（次数が低いものが良い）

②　公式が使える様に変形するか、因数定理の利用（数Ⅱ）

＜整数の性質＞

倍数・約数・最大公約数・最小公倍数

$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ の最大公約数$\boldsymbol{G}$ 、最小公倍数$\boldsymbol{l}$ として

$\boldsymbol{a = Ga'}$, $\boldsymbol{b = Gb'}$ ならば

・$\boldsymbol{a'}$,$\boldsymbol{b'}$ は互いに素

・最小公倍数：$\boldsymbol{l = Ga'b'}$

・$\boldsymbol{ab = Gl}$　さらに$\boldsymbol{G} = 1$ならば最小公倍数$\boldsymbol{l = ab}$

＜割り算の性質＞

縦書きの割り算が出来ること

$f(x)$ を $g(x)$ で割って、商が$Q(x)$ で余りが $R(x)$ のときは、

$$\begin{array}{r|l} & Q(x) \\ \hline g(x) & f(x) \\ & ////// \\ \hline & R(x) \end{array}$$

$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$ と書ける。

＜分数式計算＞

和や差での通分は式でも同様の計算である

$\frac{b}{a} \pm \frac{d}{c} = \frac{bc}{ac} \pm \frac{ad}{ac} = \frac{bc \pm ad}{ad}$　　（複号は同順）

また、割り算（除法）は掛け算（乗法）に直してから計算すること

例えば

$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d} = \frac{bc}{ad}$　（逆数をかける）

比例式の扱いは

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = t$ として $a = bt$, $c = dt$ とすると楽になることが多い

繁分数式→分母・分子に同じ多項式をかけて、普通の分数式になおす。$\dfrac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}} = \dfrac{\frac{d}{c} \times ac}{\frac{b}{a} \times ac} = \dfrac{ad}{bc}$

＜実数＞

（１）虚数の存在と複素数の四則計算

$i^2 = -1$ を用いる。特に、割り算は、分母に共役な複素数（$a+bi \Leftrightarrow a-bi$）を分母と分子に掛けることを用いて計算する。それ以外は、文字の計算と同じである。

（２）絶対値の処理

数直線上で、実数aと原点からの距離は、$|a|$

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{のとき}) \end{cases}$$

（３）平方根の計算

分母の有理化や四則計算は確実にできること

①$\sqrt{a^2} = |a|$ は、$(\sqrt{a})^2 = a$ とは違うことに注意せよ

②　２重根号を外すには、

$\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

＜１次不等式と２次方程式＞

（１）１次不等式

①　不等式の性質

$a < b, c > 0$　ならば　$ac < bc$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

$a < b, c < 0$　ならば　$ac > bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

②　連立不等式

連立不等式は、数直線を利用して共通部分を求める。

③　絶対値を含む方程式・不等式

$c > 0$ のとき、方程式　$|x| = c$ の解は、$x = \pm c$

不等式　$|x| < c$ の解は、$-c < x < c$

不等式　$|x| > c$ の解は、$x < -c, c < x$

＜２次方程式＞

$ax^2 + bx + c = 0$（$a \neq 0$）

（注）$a = 0$ だと１次方程式になる

（１）２次方程式の解法

① 因数分解を利用する

$(ax-b)(cx-d)=0$ から $x=\dfrac{b}{a}, x=\dfrac{d}{c}$

② 解の公式を用いる。

$ax^2+bx+c=0$ のとき、

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

また、b が偶数のとき（$b=2b'$）、

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

（２）２次方程式の実数解の個数

判別式 $D=b^2-4ac$ を利用して、

$D>0$ ⇒異なる２実数解なので実数解２個

$D=0$ ⇒重解なので実数解１個

$D<0$ ⇒共役な虚数解なので実数解なし（０個）

（３）解と係数の関係

α, β が、方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解ならば

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \\ \alpha\beta=\frac{c}{a} \end{cases}$$

これを用いて、解の和と積が分かれば２次方程式を作ることができる。３次方程式の解と係数の関係も作れると良い。

α, β, γ が、方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解ならば

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a} \end{cases}$$

数学 I の式の変形より

① $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

② $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

③ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

＜連立２元２次方程式＞

一般に複雑な計算になる場合が多いが、２次式の因数分解（特に定数項をゼロにした形では、１次式の積＝ゼロから１文字消去）や置き換え（$x+y$ と xy は頻出）により、単純化できる

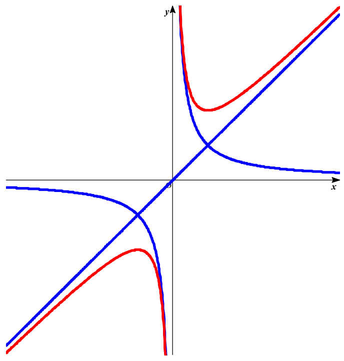
＜分数関数＞

$y=\frac{cx+d}{ax+b}$ のとき割り算の商と余りを利用して

$y=p+\frac{r}{x-q}$ と変形できる。このときグラフは、漸近線が、

$x=q, y=p$ の直角双曲線になる。

※一般の双曲線も、微分せずに、実際にグラフ上で『グラフの合成』を行うことから概形を描くことができる



例　$y=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}$ として、$y=x$ と $y=\frac{1}{x}$ をかき、高さを足して点をプロットしていく

＜無理関数＞

$y=k\sqrt{f(x)}$ のグラフは、$y^2=k^2f(x)$ のグラフで、

$k>0$ のとき x 軸より上半分。

$k<0$ のとき x 軸より下半分。

特に、$y=\sqrt{ax+b}$ や $y=-\sqrt{ax+b}$ は完璧にしておくこと。

＜写像＞

$f:x\to y$ 一意対応のとき写像（1：1 or 多：1）

特に実数から実数への写像を関数と呼ぶ　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

写像の合成：$f\circ g: x\longrightarrow g(x)\to f(g(x))$

$g\circ f: x\longrightarrow f(x)\to g(f(x))$

逆写像:写像 f が１：１のとき逆写像 f^{-1} が存在する

$f:x\longrightarrow y$ のとき　$f^{-1}:y\longrightarrow x$

＜合成関数＞

$y=f(x)$ で $y=g(x)$ のとき、$y=f(g(x))$ or $y=g(f(x))$

例　$f(x)=x+1,\ g(x)=x^2$ のとき、合成関数は

$$f(g(x))=x^2+1 \text{ or } g(f(x))=(x+1)^2$$

＜逆関数＞

$y=f(x)$ が１：１のとき

$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$

逆関数を作るには、定義域に注意して

$y=f(x)$ を x について解き $x=f^{-1}(x)$ とし、

ここで x と y を入れ替えて $y=f^{-1}(x)$ とする。

＜グラフの移動＞

元が $y=f(x)$ のグラフ

$y=-f(x)$：x 軸対称

$y=f(-x)$：y 軸対称

$y=-f(-x)$：原点対称

$y-q=f(x-p)$：平行移動

$y=f^{-1}(x)$：直線 $y=x$ 対称

$2b-y=f(2a-x)$：点 (a,b) 対称

＜２次関数とグラフ＞

$y=ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$　（$a\neq 0$）

$=a(x-\alpha)(x-\beta)$

①平方完成して、頂点(p,q)を決定する

②判別式$D=b^2-4ac$でx軸との関係を調べる

③最大値・最小値に関しては、定義域に注意する

④関数$y=f(x)$の平行移動：$y-q=f(x-p)$

⑤関数の決定

1. $y=ax^2+bx+c$
2. $y=a(x-p)^2+q$
3. $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

このうちのどれを使うかは、問題によって使い分ける。

また、両軸やグラフとの位置関係から２次方程式の解の配置（実数解の存在や符号等々）を調べることができる

$ax^2+bx+c=0$のとき判別式$D=b^2-4ac$を利用して、

$D>0 \Rightarrow x$軸との交点２個（異なる２実数解）

$D=0 \Rightarrow$なのでx軸と接する（重解）

$D<0 \Rightarrow x$軸と交わらない（共役な虚数解）

＜２次不等式＞

２次不等式の解は、２次関数のグラフから考える。

（１）判別式$D=b^2-4ac>0$のとき

①$ax^2+bx+c<0$の解は、$\alpha<x<\beta$

②$ax^2+bx+c>0$の解は、$x<\alpha, \beta<x$

（２） 判別式$D=b^2-4ac=0$のとき

①$ax^2+bx+c<0$の解は、ない

②$ax^2+bx+c>0$の解は、$x=\alpha$以外のすべての実数

③$ax^2+bx+c \leqq 0$の解は、$x=\alpha$

④$ax^2+bx+c \geqq 0$の解は、すべての実数

（３） 判別式$D=b^2-4ac<0$のとき

①$ax^2+bx+c<0$の解はない

②$ax^2+bx+c>0$の解はすべての実数

③$ax^2+bx+c \leqq 0$の解はない

④$ax^2+bx+c \geqq 0$ はすべての実数

＜集合＞

ベン図や数直線の利用と記号及び用語を確実にする

属する：$x \in A$

$\mathrm{A}=\{x|x$の満たす条件$\}=\{$要素を書き並べる$\}$

属する：$x \in A$

共通部分：$A \cap B$

和集合：$A \cup B$

補集合：$\overline{A}$

部分集合：$A \subset B$（包含関係）

要素の個数については、

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$n(A\cup B\cup C)=$

$n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

ドゥ・モルガンの法則

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

＜命題＞

条件文：$p \to q$の逆･裏・対偶を作ることが出来るようにし、その真偽の判定や証明が出来ること。真偽の判定や証明は集合の包含関係を用いる場合や『元の命題の真偽と対偶の真偽が一致する』ことを用いる。さらに必要条件・十分条件の判断。

＜真理表＞

命題ｐとｑで、「ｐまたはｑ」「ｐかつｑ」「ｐではない」「ｐならばｑ」等々を作ること、真理表でその真偽を調べる

真理表例（真：F、偽：T で表す）

p	q	p または q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	p かつ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	p ならば q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	p でない
T	F
F	T

＜条件命題と真理集合＞

真理集合$\mathrm{P}=\{x|x$は条件命題pを真とする要素$\}$

真理集合$\mathrm{Q}=\{x|x$は条件命題ｑを真とする要素$\}$

とすると、次の真理集合となる

$\mathrm{P}\cup\mathrm{Q}=\{x|x$は条件命題$p$または$q$を真とする要素$\}$　和集合

$\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}=\{x|x$は条件命題$p$かつ$q$を真とする要素$\}$　共通部分

$\overline{\mathrm{P}}=\{x|x$は条件命題$p$でないを真とする要素$\}$　補集合

※「ｐまたはｑ」「ｐかつｑ」「ｐではない」を

論理記号「$\mathrm{p}\vee\mathrm{q}$」「$\mathrm{p}\wedge\mathrm{q}$」「$\sim$ p」と表記することがある

＜真理集合の包含関係＞

「ｐならばｑ」が真$\Leftrightarrow \mathrm{P}\subseteq\mathrm{Q}$が成立

※「ｐならばｑ」を「$\mathrm{p}\to\mathrm{q}$」「$\mathrm{p}\Rightarrow\mathrm{q}$」と表記することが多い

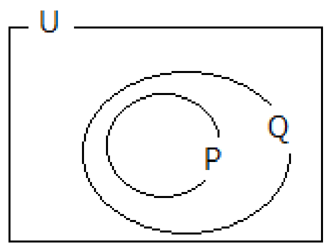
逆、裏、対偶と真理集合

元の命題が$\mathrm{p}\Rightarrow\mathrm{q}$ が真とき$\mathrm{P}\subseteq\mathrm{Q}$が成立するので

逆：$\mathrm{q}\Rightarrow\mathrm{p}$は、$\mathrm{Q}\subseteq\mathrm{P}$必ずしも真ではない

裏：$\sim \mathrm{p}\Rightarrow\sim \mathrm{q}$は、$\overline{\mathrm{P}}\subseteq\overline{\mathrm{Q}}$必ずしも真ではない

対偶：$\sim \mathrm{q}\Rightarrow\sim \mathrm{p}$ は、$\overline{\mathrm{Q}}\subseteq\overline{\mathrm{P}}$が成立なので真



※「ｐならばｑ」の真理表と「$\sim$ q $\Rightarrow\sim$ p」が一致することからも分かる

＜否定＞

「すべてxについてpである」の否定は「あるxについてpでない」

$\sim(\mathrm{p}\vee\mathrm{q})=\sim\ \mathrm{p}\wedge\sim\mathrm{q}$ 真理集合では$\overline{P\cup Q}=\bar{P}\cap\bar{Q}$

$\sim(\mathrm{p}\vee\mathrm{q})=\sim\ \mathrm{p}\wedge\sim\mathrm{q}$ 真理集合では$\overline{P\cap Q}=\bar{P}\cup\bar{Q}$

（ドゥ・モルガンの法則）

＜背理法＞

結論を否定して推論を進めると、既知事項と矛盾することを示すという証明方法である。

＜ベクトル＞

① ベクトルの演算

和・差・実数倍については、文字の計算と同様

② ベクトルの成分表示

平面ベクトル：$\vec{a}=x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}=(x_1,y_1)$

空間ベクトル：$\vec{a}=x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}+z_1\overrightarrow{e_3}=(x_1,y_1,z_1)$

成分での計算ができるようにすること

③ ベクトルの内積：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

平面ベクトル：

$\vec{a}=(x_1,y_1)$　$\vec{b}=(x_2,y_2)$のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

空間ベクトル：

$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$　$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$　のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

④ ベクトルの大きさ

平面上：$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

空間上：$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$は、良く用いられる。

⑤ m：nに分ける点：　$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

⑥ 図形への応用

図形問題を解く上では、各点の位置ベクトル

$A(\vec{a})$,$B(\vec{b})$,・・・（$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,・・・）を用いるが、始点をある点にした方が良いと判断した場合は、例えば、$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$・・・等とおいて解答することも良くある。

次のものは常識である。

・中点：$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

・三角形の重心：$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

・平行条件：$\vec{a}=t\vec{b}$　（t:実数）

・垂直条件：$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

・一直線上にある条件：$\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{AC}$　（t:実数）

・ なす角を求める：$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$から$\theta$を決定

＜等式の証明＞

①左辺＝・・・変形・・・＝右辺

② 左辺＝・・変形・・＝δ

右辺＝・・変形・・＝δ　　$\therefore$左辺＝右辺

③ 左辺―右辺＝０を示せば良い

条件付での等式の証明では、文字を消去することを考える。特に連比の形で条件が与えられえた場合は、比の値をkとおくとよい。

$x:y:z=a:b:c$ ならば、$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおき、$x=ak, y=bk, z=ck$を与式に代入して処理する。

（５）不等式の証明

① 左辺＞右辺を示すには、左辺―右辺＞０を示せば良い

つまり、

左辺―右辺＝・・変形・・＝δ＞０の形

変形には、与えられた条件に注意して因数分解や平方完成を利用して示す場合が多い。$\sqrt{\ }$や$|\ \ |$記号が入った場合は、両辺が正であることを確認し、$(\text{左辺})^2-(\text{右辺})^2>0$を示す。

（注）≧のように等号付きのときは、等号が成立するときをいう。

②左辺＞右辺を示すのに、左辺＞δかつδ＞右辺から示す。

さらに、[相加・相乗平均の関係]

$a>0, b>0$のとき

$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$　（等号は$a=b$のとき成立）

が成立することを利用する方法がある。

さらに、余裕があれば、以下の方法も知っていると良い

絶対不等式を利用する場合がある。有名な絶対不等式には、シュワルツの不等式

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$がある。

また、次の式変形は有名で右辺が$(\text{実数})^2\geqq 0$の和なので、左辺$\geqq 0$を示すことができる（等号は$a=b=c$で成立）

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

＜剰余の定理＞

$f(x)$を$g(x)$で割って、商が$Q(x)$で余りが$R(x)$のときは、

$$\begin{array}{r|l} & Q(x) \\ \hline g(x) & f(x) \\ & ////// \\ \hline & R(x) \end{array}$$

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$と書けるが、とくに$g(x)=x-\alpha$のとき、

$f(\alpha)=R \Leftrightarrow f(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$、割った余りが $f(\alpha)$

$g(x)=ax+b$ のとき、

$f\left(-\dfrac{b}{a}\right)=R \Leftrightarrow f(x)=(ax+b)Q(x)+R$、割った余りが $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

＜因数定理＞

$f(\alpha)=0 \Leftrightarrow f(x)=(x-\alpha)Q(x)$

つまり、$f(x)$ は、$x-\alpha$ という因数をもつ

高次方程式は上記因数定理の利用で解く場合が多い。

＜三角関数＞

① 一般角

$\theta=\alpha^\circ+360^\circ\times n$ （nは、整数）

② 弧度法

180°＝π（ラジアン）

一般角

$\theta=\alpha+2n\pi$ （nは、整数）

③ 扇形の弧の長さと面積

半径がr、中心角がθ（ラジアン）の扇形の弧の長さをℓ、面積をＳとすると

$\ell=r\theta,\quad S=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}r\ell$

④ 相互関係

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

⑤ 三角関数の性質

$-1\leqq\sin\theta\leqq1,\quad -1\leqq\cos\theta\leqq1$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta\quad \cos(-\theta)=\cos\theta\quad \tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\theta\pm\dfrac{\pi}{2}$ や $\theta\pm\pi$ は、図から求めるか、加法定理利用。

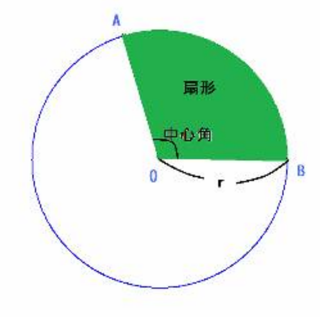
⑥ グラフは、１周期分を覚えていること

振幅や周期の変化、平行移動について確実にしておくこと

例えば、$y=a\sin b(x-\alpha)+c$

※グラフの合成から最大・最小問題を処理できる

＜扇形の弧の長さと面積＞



扇形が中心角θ、半径rのとき

扇形の孤の長さ：$l=r\theta$

扇形面積：$S=\dfrac{1}{2}rl=\dfrac{1}{2}r^2\theta$

＜三角比と三角形＞

値を決定できること、逆に角度を決定できること。

三角方程式・不等式を解けること。

相互関係

①$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

②$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

③$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

（R は、外接円の半径）

余弦定理（２辺 x, y と挟む角 θ）

$z^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta$

三角形の面積（２辺 x, y と挟む角 θ）

$S=\dfrac{1}{2}xy\sin\theta$

（内接円の半径 r を求めることへ応用される）

$S=\dfrac{1}{2}ar+\dfrac{1}{2}br+\dfrac{1}{2}cr$ より

さらに、余裕があれば、以下のヘロンの公式も知っていると良い面積$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（$s$ は三角形の周の半分）

＜三角関数＞

⑦ 一般角

$\theta=\alpha^\circ+360^\circ\times n$ （n は、整数）

⑧ 相互関係

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\qquad \tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

⑨ 三角関数の性質

$\sin(-\theta)=-\sin\theta\quad \cos(-\theta)=\cos\theta\quad \tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\theta\pm90^\circ$ や $\theta\pm180^\circ$ も、図から求められる。

⑩ グラフは、１周期分を覚えていること

振幅や周期の変化、平行移動について確実にしておくこと

例えば、$y=a\sin b(x-\alpha^\circ)+c$

⑪ 加法定理

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

⑫ ２倍角・半角・３倍角の公式

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}\qquad \cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}\qquad \tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$　（３番３振、４番も散々）

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

⑬　積和の公式（丸暗記でなく導けるようにする）

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

⑭　和積の公式（丸暗記でなく導けるようにする）

$$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

⑮　三角関数の合成

$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$

ただし、$r=\sqrt{a^2+b^2}$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

注）図を用いて求める方法が便利である。

＜順列と組合せ＞

基本的には樹形図で数え上げげする

その他の方法として、

順列：${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

組合せ：${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{n!}$

重複順列：n^r

同じものを含む順列：$\frac{n!}{p!q!r!\ldots}$

重複組合せ：${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

円順列：$(n-1)!$

じゅず順列：$\frac{(n-1)!}{2}$

組分けについて…同じ数ずつに分けるとき、A，B，Cのような区別があるかないか注意

＜確率の定義＞

$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$　　$0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$

＜余事象の確率＞

$\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$

加法定理（場合分け）

$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

注意：背反ではない場合は

$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

事象$\boldsymbol{A}$が起こるが、事象$\boldsymbol{B}$が起こらない確率

$\mathrm{P}(A\cap\overline{B}) = \mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

＜独立試行の確率（引き続き起こる）＞

$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(A)$

＜反復試行の確率＞

${}_nc_r p^r q^{n-r}$　ここで、$q = 1-p$

＜条件付き確率＞

事象$\boldsymbol{A}$が起こったときの、事象$\boldsymbol{B}$が起こる確率

$$P_A(B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

したがって、乗法定理 $\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\,P_A(B)$を得る

＜指数関数＞

①　累乗根の計算法則

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$　　$\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$，$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$，$\sqrt[pn]{a^{pm}} = \sqrt[n]{a^m}$

②　指数の拡張

$a^0 = 1$，$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$，$a^{-1} = \frac{1}{a}$

指数法則は、r, sが実数の範囲で成立する。

$a^r\cdot a^s = a^{r+s}$　$(a^r)^s = a^{rs}$　$(ab)^r = a^r a^r$

③　指数関数のグラフ

$a>1$のときは単調に増加

$0<a<1$のときは単調に減少

ともに、y切片は１、点$(1,a)$を通る

④　大小関係

$a>1$のときは、$a^x > a^y \Leftrightarrow \mathrm{x} > \mathrm{y}$

$0<a<1$のときは、$a^x > a^y \Leftrightarrow \mathrm{x} < \mathrm{y}$

＜対数関数＞

①　対数の計算法則

$\log_a a = 1$，　$\log_a 1 = 0$，（　$\log_a \frac{1}{a} = -1$　）

$\log_a A + \log_a B = \log_a AB$

$\log_a A - \log_a B = \log_a \frac{A}{B}$

$\log_a A^n = n\log_a A$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$　（底変換の公式）

余裕があれば以下の式は覚えると便利である。

$\log_{a^n} b^n = \log_a b$,　　$a^{\log_a b} = b$

② 対数関数のグラフ

$a > 1$ のときは単調に増加

$0 < a < 1$ のときは単調に減少

ともに、x 切片は１、点 $(a, 1)$ を通る

指数関数とは、直線 $y = x$ に関して対称である

③ 大小関係

$a > 1$ のときは、$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$

$0 < a < 1$ のときは、$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$

また、真数条件 $x > 0,\ y > 0$ に注意せよ。

④ 常用対数（底が１０の対数）

$\log_{10} x$ の値で、x の桁数や小数点以下第何位に初めて０でない数が現れるかを調べることが出来る。

$n-1 \leqq \log_{10} x < n \Leftrightarrow x$ が n 桁の数

$-n \leqq \log_{10} x < -(n-1) \Leftrightarrow x$ は、小数点以下第 n 位に初めて０でない数が現れる

＜図形と方程式＞

① ２点間の距離

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ のとき

$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

② m ： n に分ける点

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ のとき、線分 AB を m ： n に分ける点は、

$$\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$$

注） $mn < 0$ のとき外分点

③ 三角形の重心

３点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ を頂点とする△ ABC の重心 G の座標は、$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

④ 点に関して対称な点

点 $A(a,b)$ に関して２点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ が対称なとき、

$a = \frac{x_1 + x_2}{2}$,　$b = \frac{y_1 + y_2}{2}$　が成り立つ。

⑤ 直線の方程式

傾き m で、点 (x_1, y_1) を通る： $y - y_1 = m(x - x_1)$

２点 (x_1, y_1) (x_2, y_2) を通る： $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

注）分母、または、分子が０のときは座標軸と平行な直線

$x = x_1$,　$y = y_1$ となる。

⑥ ２直線の位置関係

２直線の傾きが、m_1, m_2 のとき

平行： $m_1 = m_2$　（一致の場合も平行に含める）

垂直： $m_2 = -\frac{1}{m_1}$　（または、$m_1 \cdot m_2 = -1$）

さらに、余裕があれば以下の公式も知っていると良い

一般形の場合は、$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

平行： $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$

垂直： $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

⑦ 直線に関して対称な点

２点 A, B が直線 ℓ に関して対称なとき、つぎの２つの事柄が成り立つ。

［1］ 直線 AB は ℓ に垂直である。

［2］ 直線 AB の中点は ℓ 上にある。

⑧ 点と直線の距離

点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 d は、

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

⑨ 円の方程式

一般形： $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$

平方完成により、

標準形： $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

となり、中心 (a, b) で半径 r の円を得る

⑩ 円と直線の関係

接点が点 (x_1, y_1) で原点を中心とする円のとき

接線： $x_1 x + y_1 y = r^2$

接点が点 (x_1, y_1) で中心 (a, b) の円のとき

接線： $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

交点の数に関しては、判別式の利用か、中心と直線までの距離を利用して調べることが出来る。

⑪ 不等式と領域

直線の上部： $y > ax + b$

直線の下部： $y < ax + b$

曲線の上部： $y > f(x)$

曲線の下部： $y < f(x)$

円の内部： $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$

円の外部： $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$

注）領域内かどうかは、点の座標を代入して成立するかどうかで調べることが出来る。また、境界を含むかどうかは必ずチェックすること。

＜２次曲線＞

軌跡としての２次曲線を知ること

円： $x^2 + y^2 = r^2$　　定点から等距離

楕円： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$　　２定点からの距離の和が一定

双曲線： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$　　２定点からの距離の差が一定

放物線： $y^2 = 4px$　　定点と定直線までが等距離

（焦点 $(\pm p, 0)$　準線 $x = \pm p$ ）

注意：楕円での $a > b > 0$ と $b > a > 0$ の違い。双曲線での

$\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$、放物線$x^2=4py$も、焦点、準線、どのような図形になるかを押さえておくこと。

※円、楕円、双曲線の焦点、準線及び離心率については触れない

＜２次曲線の接線＞

接点(x_1, y_1)のとき

①円：$x^2+y^2=r^2$→接線　$x_1x+y_1y=r^2$

②楕円：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　→接線　$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

③双曲線：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　→接線　$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

④放物線：$y^2=4px$　→接線　$y_1y=2p(x+x_1)$

接線の作り方を統一して覚えておこう。

＜２次曲線の平行移動＞

x軸方向にx_1、軸方向にy_1平行移動する

$F(x,y)=0 \to F(x-x_1, y-y_1)=0$

＜２次曲線の不等式が表す領域＞

原点(0,0)を代入して、成立する側としない側に分かれる

例　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1\leq 0$は原点(0,0)を代入して成立よって

不等式が表す領域は、境界線が楕円$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$の内部である

※連立不等式の表す領域は、共通部分が領域となる

＜線形計画＞

条件を満たす領域を図示し、領域内の点で、ある値kがx, yの１次式でかければ、直線$k=ax+by$を平行移動させて、その切片から、kの最大値や最小値を判断することができる

＜点の軌跡＞

動点Pの座標を(x, y)とおき、x, yの関係式を作り、図形を判断する

（図形の限界がある場合もあるので、逆をチェックする）

※動点が２個以上ある場合も動点Pの座標を(x, y)とおき、他の動点も(u, v)等々おくが、途中で消去しx, yの関係式を導けばよい