数学ⅡB

＜命題の合成＞

命題p と qで、「p または q」「p かつ q」「p ではない」「p ならば q」等々を作ること、真理表でその真偽を調べることができる

真理表例（真：F、偽：T で表す）

p	q	p または q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	p かつ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	p ならば q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	p でない
T	F
F	T

※「p かつ q」は「p および q」とも書かれれる

＜条件命題と真理集合＞

真理集合P = $\{x|x$は条件命題pを真とする要素$\}$

真理集合Q = $\{x|x$は条件命題 q を真とする要素$\}$

とすると、次の真理集合となる

P∪Q = $\{x|x$は条件命題pまたはqを真とする要素$\}$　和集合

P∩Q = $\{x|x$は条件命題pかつqを真とする要素$\}$　共通部分

$\overline{\mathrm{P}}$ = $\{x|x$は条件命題pでないを真とする要素$\}$　補集合

※「p または q」「p かつ q」「p ではない」を

論理記号「p∨q」「p∧q」「～ p」と表記することがある

＜真理集合の包含関係＞

「p ならば q」が真⇔P ⊆ Qが成立

※「p ならば q」を「p → q」「p ⇒ q」と表記することが多い

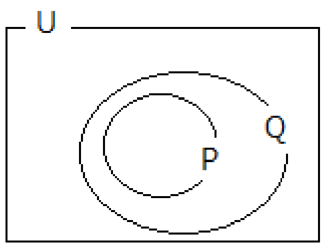
逆、裏、対偶と真理集合

元の命題がp ⇒ q が真ときP ⊆ Qが成立するので

逆：q ⇒ p は、Q ⊆ P必ずしも真ではない

裏：～ p ⇒～ qは、$\overline{\mathrm{P}} \subseteq \overline{\mathrm{Q}}$必ずしも真ではない

対偶：～ q ⇒～ p は、$\overline{\mathrm{Q}} \subseteq \overline{\mathrm{P}}$が成立なので真



※「p ならば q」の真理表と「～ q ⇒～ p」が一致することからも分かる

＜ドゥ・モルガンの法則＞

～(p∨q) =～ p∧～ q 真理集合では$\overline{P\cup Q} = \bar{P}\cap\bar{Q}$

～(p∨q) =～ p∧～ q 真理集合では$\overline{P\cap Q} = \bar{P}\cup\bar{Q}$

＜順列と組合せ＞

基本的には樹形図で数え上げする

その他の方法として、

順列：${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

組合せ：${}_nC_r = \dfrac{{}_nP_r}{n!}$

重複順列：n^r

同じものを含む順列：$\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots}$

重複組合せ：${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

円順列：$(n-1)!$

じゅず順列：$\dfrac{(n-1)!}{2}$

組分けについて…同じ数ずつに分けるとき、A，B，Cのような区別があるかないか注意

＜二項定理＞

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_nb^n$$

パスカルの三角形を利用できること

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
⋮

${}_1C_1$ ${}_1C_0$
${}_2C_0$ ${}_2C_1$ ${}_2C_2$
${}_3C_0$ ${}_3C_1$ ${}_3C_2$ ${}_3C_3$
${}_4C_0$ ${}_4C_1$ ${}_4C_2$ ${}_4C_3$ ${}_4C_4$
${}_5C_0$ ${}_5C_1$ ${}_5C_2$ ${}_5C_3$ ${}_5C_4$ ${}_5C_5$
${}_6C_0$ ${}_6C_1$ ${}_6C_2$ ${}_6C_3$ ${}_6C_4$ ${}_6C_5$ ${}_6C_6$
⋮

$${}_nC_i = {}_{n-1}C_{i-1} + {}_{n-1}C_i$$

多項定理：$(a+b+c+\cdots)^n$の展開式で、$a^pb^qc^r\cdots$の係数は、

$\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots}$である。

＜数列＞

等差数列：$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$　　$S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

等比数列：$a_n = ar^{n-1}$　　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$　　$(r \neq 1)$

数列の和の記号$\sum$　について

①$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

②$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

③$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

⑤$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

さらに余裕があれば、以下の公式も知っていると良い

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

階差数列：$a_{n+1} - a_n = b_n$ のとき

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ （$n \geq 2$）

和と一般項の関係は

$a_1 = S_1$　$a_n = S_n - S_{n-1}$ （$n \geq 2$）

＜漸化式の解法＞

等差数列 $a_{n+1} - a_n = d$ や等比数列 $a_{n+1} = ra_n$ の利用

また、階差数列 $a_{n+1} - a_n = b_n$ の利用。

有名なものには、

$a_{n+1} = pa_n + q$　$(p \neq 1) \to \alpha = p\alpha + q$

を満たす α を用いて→ $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形すると

数列 $\{a_n - \alpha\}$ は、初項 $a_1 - \alpha$ 公比 p の等比数列となるので、

$$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha) \cdot p^{n-1} \to a_n = (a_1 - \alpha) \cdot p^{n-1} + \alpha$$

与えられた漸化式が２項間のときは、上記の形が多く、両辺の対数、逆数をとったり、あるもので割り算することにより

$a_{n+1} = pa_n + q$　$(p \neq 1)$ の形に変形できる。

与えられた漸化式が３項間のときは、

$pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$ の型になるもの

特性方程式：$px^2 + qx + r = 0$ の解で分類する。

２解が α, β のとき

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ と $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$

と変形できる。

＜数学的帰納法＞

自然数に関するある命題を証明する方法

（Ｉ）ある命題で、n=1 のときに成立することを示す。

（Ⅱ）ある命題で、n=k のとき成立を仮定して、n=k+1 のときも成立することを示す。

以上、（Ｉ）（Ⅱ）より、すべての自然数についてある命題が成立することが証明される。

＜数列の極限＞

収束：$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$　（極限値が α）

発散：$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$　（$+\infty$ に発散）

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$　（$-\infty$ に発散）

a_n が振動　（極限値なし）

・知っているべき数列の極限

(a) $k > 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} n^k = +\infty$　（$+\infty$ に発散）

(b) $k < 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} n^k = 0$　（極限値０）

(c) $\lim_{n\to\infty} a^n$ について、

$a \leq -1$ のとき振動

$-1 < a < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$

$a = 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$

$a > 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき

（$n \to \infty$ のとき、$a_n \to \alpha, b_n \to \beta$ とも書く）

(a) $a_n > b_n \Rightarrow \alpha \geq \beta$

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ 、$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ 、$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

（$\beta \neq 0$）が成立する。

＜無限等比級数＞

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

収束・発散について数列の極限と混同しないように注意せよ

収束するのは、$-1 < r < 1$ のときのみで、その和は $\frac{a}{1-r}$

$r \geq 1$ のとき $a > 0$ ならば $+\infty$ に発散で $a < 0$ ならば $-\infty$ に発散

$r \leq -1$ のときは振動（発散）する。

※循環小数を無限等比級数とみて分数に直せる

＜区分求積＞

$$\text{面積S} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

※積分を使わない方法である

＜三角比と三角形＞

値を決定できること、逆に角度を決定できること。

三角方程式・不等式を解けること。

相互関係

①$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

②$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

③$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

（R は、外接円の半径）

余弦定理（２辺 x, y と挟む角 θ）

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta$$

三角形の面積（２辺 x, y と挟む角 θ）

$$S=\frac{1}{2}xy\sin\theta$$

（内接円の半径 r を求めることへ応用される）

$S=\dfrac{1}{2}ar+\dfrac{1}{2}br+\dfrac{1}{2}cr$ より

さらに、余裕があれば、以下のヘロンの公式も知っていると良い

面積 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ （s は三角形の周の半分）

＜三角関数＞

① 一般角

$\theta=\alpha^\circ+360^\circ\times n$ （n は、整数）

② 相互関係

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\quad\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

③ 三角関数の性質

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\quad\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\quad\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\theta\pm90^\circ$ や $\theta\pm180^\circ$ も、図から求められる。

④ グラフは、１周期分を覚えていること

振幅や周期の変化、平行移動について確実にしておくこと

例えば、 $y=a\sin b(x-\alpha^\circ)+c$

⑤ 加法定理

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

⑥ ２倍角・半角・３倍角の公式

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$ $\quad\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$ $\quad\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ （３番３振、４番も散々）

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

⑦ 積和の公式（丸暗記でなく導けるようにする）

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

⑧ 和積の公式（丸暗記でなく導けるようにする）

$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

⑨ 三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$

ただし、$r=\sqrt{a^2+b^2}$

$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\quad\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

注）図を用いて求める方法が便利である。

＜指数関数＞

① 累乗根の計算法則

$(\sqrt[n]{a})^n=a$ $\quad\dfrac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$

$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ $\quad\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ $\quad\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$

② 指数の拡張

$a^0=1$　　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$　　$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

指数法則は、r, s が実数の範囲で成立する。

$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$　　$(a^r)^s=a^{rs}$　　$(ab)^r=a^rb^r$

③ 指数関数のグラフ　$\boldsymbol{y=a^x}$

$a>1$ のときは単調に増加

$0<a<1$ のときは単調に減少

ともに、y 切片は１、点 $(1,\ a)$ を通る

④ 大小関係

$a>1$ のときは、$a^x>a^y \Leftrightarrow x>y$

$0<a<1$ のときは、$a^x>a^y \Leftrightarrow x<y$

＜対数関数＞

① 対数の計算法則

$\log_a a=1$　　$\log_a 1=0$　　（　$\log_a \dfrac{1}{a}=-1$　）

$\log_a A+\log_a B=\log_a AB$

$\log_a A-\log_a B=\log_a \dfrac{A}{B}$

$\log_a A^n=n\log_a A$

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　（底変換の公式）

余裕があれば以下の式は覚えると便利である。

$\log_{a^n} b^n=\log_a b$

② 対数関数のグラフ　$\boldsymbol{y=\log_a x}$

$a>1$ のときは単調に増加

$0<a<1$ のときは単調に減少

ともに、x 切片は１、点 $(a,\ 1)$ を通る

指数関数とは、直線 $y=x$ に関して対称である

③ 大小関係

$a>1$ のときは、$\log_a x>\log_a y \Leftrightarrow x>y$

$0<a<1$ のときは、$\boldsymbol{\log_a x>\log_a y \Leftrightarrow x<y}$

また、真数条件 $x>0,\ y>0$ に注意せよ。

④ 常用対数（底が１０の対数）

$\log_{10} x$ の値で、x の桁数や小数点以下第何位に初めて０でない数が現れるかを調べることが出来る。

$n-1\le \log_{10} x<n \Leftrightarrow x$ が n 桁の数

$-n\le \log_{10} x<-(n-1) \Leftrightarrow x$ は、小数点以下第 n 位に初めて０でない数が現れる

＜複素数平面＞

① 複素数の四則計算

$i^2=-1$ を用いる。特に、割り算は、分母に共役な複素数をかけて $a+bi$ の形にすること

複素数の大きさ・偏角

$z=a+bi$ のとき、$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$z\bar{z}=|z|^2$ を利用することは頻出

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ で、$\arg z=\theta$

⑤ 共役な複素数

$z=\bar{z}$ のとき、z は実数

$z=-\bar{z}$ のとき、z は純虚数（$z\neq 0$）

⑥ 複素数平面

$z=a+bi$ を点 (a,b) と考える

・点 z と x 軸（実軸）に関して対称な点　$\bar{z}$

・点 z と y 軸に（虚軸）関して対称な点　$-\bar{z}$

・点 z と原点に関して対称な点　$-z$

⑦ 演算と図形的意味

和と差はベクトルと同じ扱いで処理

積は、回転して絶対値倍

⑧ ド・モアブルの定理（複素数の n 乗を求めるには）

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

これは、複素数の累乗の計算に便利な式である

例　$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3=\cos\pi+i\sin\pi=-1+0i=-1$

＜ベクトル＞

① ベクトルの演算

和・差・実数倍については、文字の計算と同様

② ベクトルの成分表示

平面ベクトル：$\vec{a}=x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}=(x_1,y_1)$

空間ベクトル：$\vec{a}=x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}+z_1\overrightarrow{e_3}=(x_1,y_1,z_1)$

成分での計算ができるようにすること

③ ベクトルの内積：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

平面ベクトル：

$\vec{a}=(x_1,y_1)$　$\vec{b}=(x_2,y_2)$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

空間ベクトル：

$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$　$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$　のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

④ ベクトルの大きさ

平面上：$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

空間上：$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

$\left|\vec{a}\right|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$ は、良く用いられる。

⑤ m：nに分ける点：　$\vec{p} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$

⑥ 図形への応用（空間ベクトルも同様である）

図形問題を解く上では、各点の位置ベクトル

$A(\vec{a}), B(\vec{b})$,・・・（$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$,・・・）を用いるが、始点をある点にした方が良いと判断した場合は、例えば、$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$・・・等とおいて解答することも良くある。

次のものは常識である。

・中点：$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

・三角形の重心：$\vec{g} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

・平行条件：$\vec{a} = t\vec{b}$　（t:実数）

・垂直条件：$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

・一直線上にある条件：$\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$　（t:実数）

・　なす角を求める：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$ からθを決定

＜２次曲線＞

軌跡としての２次曲線を知ること

円：$x^2 + y^2 = r^2$　定点から等距離

楕円：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　２定点からの距離の和が一定

双曲線：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　２定点からの距離の差が一定

放物線：$y^2 = 4px$　定点と定直線までが等距離

（焦点$(\pm p, 0)$　準線$x = \pm p$）

注意：楕円での $a > b > 0$ と $b > a > 0$ の違い。双曲線での $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$、放物線$x^2 = 4py$ も、焦点、準線、どのような図形になるかを押さえておくこと。

※円、楕円、双曲線の焦点、準線及び離心率については触れない

＜２次曲線の接線＞

接点(x_1, y_1)のとき

①円：$x^2 + y^2 = r^2$ →接線　$x_1x + y_1y = r^2$

②楕円：$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　→接線　$\dfrac{x_1x}{a^2} + \dfrac{y_1y}{b^2} = 1$

③双曲線：$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$　→接線　$\dfrac{x_1x}{a^2} - \dfrac{y_1y}{b^2} = 1$

④放物線：$y^2 = 4px$　→接線　$y_1y = 2p(x + x_1)$

接線の作り方を統一して覚えておこう。

＜２次曲線の平行移動＞

x軸方向にx_1、軸方向にy_1平行移動する

$F(x, y) = 0 \rightarrow F(x - x_1, y - y_1) = 0$

＜２次曲線の不等式が表す領域＞

原点(0,0)を代入して、成立する側としない側に分かれる

例　$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1 \leq 0$ は原点(0,0)を代入して成立よって

不等式が表す領域は、境界線が楕円$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$の内部である

※連立不等式の表す領域は、共通部分が領域となる

＜媒介変数表示＞

① 円：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

② 楕円：$x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$

③ 双曲線：$x = \dfrac{a}{\cos\theta}, y = b\tan\theta$

④　サイクロイド：$x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$

⑤ 放物線：$y^2 = 4px$

＜曲座標と曲方程式＞

直交座標(x, y)と曲座標(r, θ)の関係

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$　$x^2 + y^2 = r^2$

特に、曲方程式$r = f(\theta)$で表される曲線は、

$x = f(\theta)\cos\theta, y = f(\theta)\sin\theta$ である。

良くある曲方程式

① 中心(r_0, θ_0)、半径aの円：$r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) = a^2$

注）左辺は、２点(r, θ) (r_0, θ_0)間の距離を表す

② 極 O を通り、始線 OX となす角がαである直線：$\theta = \alpha$

③ 点$A(a, \alpha)$を通り、OA に垂直な直線：$r\cos(\theta - \alpha) = a$

$(a > 0)$

④ アルキメデスのら線：$r = k\theta$

＜座標軸の変換＞

旧座標(x, y)、新座標(x', y')とする

① 平行移動　新原点(a, b)

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

② 回転移動

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

※逆に解けば点を回転移動できる

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

＜微分法＞

① 平均変化率　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

② 微分係数　$f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

③ 関数の極限　$\lim_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ で、$\lim_{x\to\alpha}g(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to\alpha}f(x)=0$

④ 接線・法線

曲線 $y=f(x)$上の$x=a$における接線の方程式は、

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

曲線 $y=f(x)$上の$x=a$における法線の方程式は、

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

⑤ 導関数の定義

定義：$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$y=c\Rightarrow y'=0$

$y=x^n\Rightarrow y'=nx^{n-1}$

⑥ 関数のグラフ

$f'(x)=0$ を満たすxを定義域内で調べ、増減表を作る

極大・極小・y 切片となる点に注意して描くが、場合によっては

$f(x)=0$ の解を求めてx切片も得る。

⑦ 最大・最小

定義域に注意して、増減表から判断する。

⑧ 方程式・不等式への応用

グラフと直線との交点または上下関係を調べればよい。

・ $f(x)=a\Rightarrow\begin{cases}y=f(x)\\ y=a\end{cases}$　交点等を調べる

・ $f(x)>g(x)\Rightarrow F(x)=f(x)-g(x)$ のグラフで調べる

（増減表のみで対応することもできる）

＜積分法＞

② 不定積分　$\int f(x)dx=F(x)+C$　（C ：積分定数）

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

③ 定積分　$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

性質：(1) $\int_a^a f(x)dx=0$

(2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$

(4) $\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx$

(5) $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx & (f(x):\text{偶関数})\\ 0 & (f(x):\text{奇関数})\end{cases}$

(6) $f(x)\geqq g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\geqq\int_a^b g(x)dx$

④ 微分と定積分　$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

⑤ 2曲線に囲まれた部分の面積

$$S=\int_\alpha^\beta\{f(x)-g(x)\}dx$$

特に、α,β が、方程式$ax^2+bx+c=0$の解ならば

$$\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

⑥ 体積

切り口の面積が、$S(x)$ のときは$V=\int_\alpha^\beta S(x)dx$

$V=\pi\int_\alpha^\beta\{f(x)\}^2dx$　（回転体の体積）

＜速度・加速度・点の位置＞

時刻tの関数として、点の位置が$s=s(t)$のとき

$$\underset{\text{点の位置}}{s(t)}\xrightarrow{\text{微分}}\underset{\text{速度}}{v(t)}\xrightarrow{\text{微分}}\underset{\text{加速度}}{a(t)}$$

計算上は、$s'(t)=v(t),s''(t)=a(t)$

逆に考えて、$\underset{\text{加速度}}{a(t)}\xrightarrow{\text{積分}}\underset{\text{速度}}{v(t)}\xrightarrow{\text{積分}}\underset{\text{点の位置}}{s(t)}$

計算上は、$s(t)=\int_a^t v(t)dt+s(a)$ 、$v(t)=\int_a^t a(t)dt+v(a)$

注）平面運動のときは、ベクトルとして扱う。

速度ベクトル$\vec{v}=(v_x(t),v_y(t))$

加速度ベクトル$\vec{a}=(a_x(t),a_y(t))$

注）速さはベクトルの大きさ$|\vec{v}|$である。

＜道のり＞

$$l=\int_a^t|v(t)|dt$$