公式集（数学Ⅱ・B）　頭に入っていますか？

＜図形と方程式＞

①　２点間の距離

$A=(x_1,y_1)\ B=(x_2,y_2)$ のとき

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

②　ｍ：ｎに分ける点

$A=(x_1,y_1)\ B=(x_2,y_2)$ のとき、線分 AB をｍ：ｎに分ける点は、$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

注）$mn<0$ のとき外分点

③　直線の方程式

傾き m で、点 (x_1,y_1) を通る：$y-y_1=m(x-x_1)$

２点 (x_1,y_1) (x_2,y_2) を通る：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$

注）分母が０のとき、は座標軸と平行な直線

$x=x_1$、$y=y_1$ となる。

④　２直線の位置関係

２直線の傾きが、m_1, m_2 のとき

平行：$m_1=m_2$　（一致の場合も平行に含めた）

垂直：$m_2=-\dfrac{1}{m_1}$　（または、$m_1\cdot m_2=-1$）

さらに、余裕があれば以下の公式も知っていると良い

一般形の場合は、$a_1x+b_1y+c_1=0$

$a_2x+b_2y+c_2=0$

平行：$a_1b_2-a_2b_1=0$

垂直：$a_1a_2+b_1b_2=0$

⑤　点と直線の距離

点 (x_1,y_1) と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

⑥　円の方程式

一般形：$x^2+y^2+lx+my+n=0$

平方完成により、

標準形：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

となり、中心 (a,b) で半径 r の円を得る

⑦　円と直線の関係

接点が点 (x_1,y_1) で原点を中心とする円のとき

接線：$x_1x+y_1y=r^2$

接点が点 (x_1,y_1) で中心 (a,b) の円のとき

接線：$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

交点の数に関しては、判別式の利用か、中心と直線までの距離を利用して調べることが出来る。

⑧　不等式と領域

直線の上部：$y>ax+b$

直線の下部：$y<ax+b$

曲線の上部：$y>f(x)$

曲線の下部：$y<f(x)$

円の内部：$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$

円の外部：$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$

注）領域内かどうかは、点の座標を代入して成立するかどうかで調べることが出来る。また、境界を含むかどうかは必ずチェックすること。

＜三角関数＞

①　一般角

$\theta=\alpha^\circ+360^\circ\times n$　（n は、整数）

②　相互関係

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

③　三角関数の性質

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　$\cos(-\theta)=\cos\theta$　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\theta\pm90^\circ$ や $\theta\pm180^\circ$ も、図から求められる。

④　グラフは、１周期分を覚えていること

振幅や周期の変化、平行移動について確実にしておくこと

例えば、　$y=a\sin b(x-\alpha^\circ)+c$

⑤　加法定理

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

⑥　２倍角・半角・３倍角の公式

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$　$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

⑦　積和の公式

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

公式集（数学Ⅱ・B）　頭に入っていますか？

⑧　和積の公式

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

⑨　三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$

ただし、$r=\sqrt{a^2+b^2}$

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

注）図を用いて求める方法が便利である。

＜指数関数＞

①　累乗根の計算法則

$$(\sqrt[n]{a})^n=a\qquad\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}\qquad\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\qquad\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$$

②　指数の拡張

$$a^0=1\qquad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\qquad a^{-r}=\frac{1}{a^r}$$

指数法則は、r, s が実数の範囲で成立する。

$$a^r\cdot a^s=a^{r+s}\qquad(a^r)^s=a^{rs}\qquad(ab)^r=a^rb^r$$

③　指数関数のグラフ　$\boldsymbol{y=a^x}$

$a>1$ のときは単調に増加

$0<a<1$ のときは単調に減少

ともに、y 切片は１、点 $(1, a)$ を通る

④　大小関係

$a>1$ のときは、$a^x>a^y\Leftrightarrow x>y$

$0<a<1$ のときは、$a^x>a^y\Leftrightarrow x<y$

＜対数関数＞

①　対数の計算法則

$$\log_a a=1\qquad\log_a 1=0\qquad\left(\ \log_a\frac{1}{a}=-1\ \right)$$

$$\log_a A+\log_a B=\log_a AB$$

$$\log_a A-\log_a B=\log_a\frac{A}{B}$$

$$\log_a A^n=n\log_a A$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$　（底変換の公式）

余裕があれば以下の式は覚えると便利である。

$$\log_{a^n} b^n=\log_a b$$

②　対数関数のグラフ　$\boldsymbol{y=\log_a x}$

$a>1$ のときは単調に増加

$0<a<1$ のときは単調に減少

ともに、x 切片は１、点 $(a, 1)$ を通る

指数関数とは、直線 $y=x$ に関して対称である

③　大小関係

$a>1$ のときは、$\log_a x>\log_a y\Leftrightarrow x>y$

$0<a<1$ のときは、$\boldsymbol{\log_a x>\log_a y\Leftrightarrow x<y}$

また、真数条件 $x>0, y>0$ に注意せよ。

④　常用対数（底が１０の対数）

$\log_{10}x$ の値で、x の桁数や小数点以下第何位に初めて０でない数が現れるかを調べることが出来る。

$n-1\le\log_{10}x<n\Leftrightarrow x$ が n 桁の数

$-n\le\log_{10}x<-(n-1)\Leftrightarrow x$ は、小数点以下第 n 位に初めて０でない数が現れる

＜微分法＞

①　平均変化率　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

②　微分係数　$f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

③　関数の極限　$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ で、$\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=0$

④　接線

曲線 $y=f(x)$ 上の $x=a$ における接線の方程式は、

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

⑤　導関数

定義：$f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$y=c\Rightarrow y'=0\qquad y=x^n\Rightarrow y'=nx^{n-1}$

⑥　関数のグラフ

$f'(x)=0$ を満たす x を定義域内で調べ、増減表を作る

極大・極小・y 切片となる点に注意して描くが、場合によっては $f(x)=0$ の解を求めて x 切片も得る。

⑦　最大・最小

定義域に注意して、増減表から判断する。

⑧　方程式・不等式への応用

グラフと直線との交点または上下関係を調べればよい。

・$f(x)=a\Rightarrow\begin{cases}y=f(x)\\y=a\end{cases}$　交点等を調べる

・$f(x)>g(x)\Rightarrow F(x)=f(x)-g(x)$ のグラフで調べる

（増減表のみで対応することもできる）

公式集（数学Ⅱ・B）　頭に入っていますか？

＜積分法＞

① 不定積分　$\int f(x)dx = F(x) + C$　（C：積分定数）

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

② 定積分　$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = \mathrm{S}$　（S は符号付面積）

性質：(1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

(4) $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^c \{f(x) + g(x)\}dx$

(5) $\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & (f(x):\text{偶関数}) \\ 0 & (f(x):\text{奇関数}) \end{cases}$

(6) $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

③ 微分と定積分　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

④ ２曲線に囲まれた部分の面積

$S = \int_\alpha^\beta \{f(x) - g(x)\}dx$

特に、α, β が、方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解ならば

$\int_\alpha^\beta (ax^2 + bx + c)dx = -\frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$

⑤ 体積

切り口の面積が、$S(x)$ のときは $V = \int_\alpha^\beta S(x)dx$

$V = \pi\int_\alpha^\beta \{f(x)\}^2 dx$　（回転体の体積）

＜複素数＞

① 複素数の四則計算

$i^2 = -1$ を用いる。特に、割り算は、分母に共役な複素数を分母と分子に掛けることを用いて計算する。それ以外は、文字の計算と同じである。

② ２次方程式の解

解の公式を用いる。$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$　また、

b が偶数のとき（$b = 2b'$）は、$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$

③ 判別式：判別式 $D = b^2 - 4ac$

判別式 $D > 0, D = 0, D < 0$ で解を分類できる

注）図形で交点の数を調べることができる

⑤ 解と係数の関係

α, β が、方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解ならば

$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$

これを用いて、解の和と積が分かれば 2 次方程式を作ることができる。３次方程式の解と係数の関係も作れると良い。

α, β, γ が、方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解ならば

$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases}$

⑥ 剰余の定理

$f(x)$ を $g(x)$ で割って、商が $Q(x)$ で余りが $R(x)$ のときは、

$$\begin{array}{r} Q(x) \\ g(x)\overline{)\,f(x)} \\ ////// \\ \hline R(x) \end{array}$$

$f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$ と書けるが、とくに、$g(x) = x - \alpha$ のときは、

$f(\alpha) = R \Leftrightarrow f(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$　つまり、割った余りが R

⑦ 因数定理

$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x - \alpha)Q(x)$

つまり、$f(x)$ は、$x - \alpha$ という因数をもつ

高次方程式は上記因数定理の利用で解く場合が多い

⑧ 複素数の大きさ・偏角

$z = a + bi$ のとき、$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z\bar{z} = |z|^2$ を利用することは頻出

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ で、$\arg z = \theta$

⑨ 共役な複素数

$z = \bar{z}$ のとき、z は実数

$z = -\bar{z}$ のとき、z は純虚数（$z \neq 0$）

⑩ 複素数平面

$z = a + bi$ を点 (a, b) と考える

・点 z と x 軸（実軸）に関して対称な点　$\bar{z}$

・点 z と y 軸に（虚軸）関して対称な点　$-\bar{z}$

・点 z と原点に関して対称な点　$-z$

⑪ 演算と図形的意味

和と差はベクトルと同じ扱いで処理

積は、回転して絶対値倍

⑫ ド・モアブルの定理（複素数の n 乗を求めるには）

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

公式集（数学Ⅱ・B）　頭に入っていますか？

⑬　１のｎ乗根

$z^n=1$ はｎ個あり

$z_k=\cos(\frac{360^\circ}{n}\times k)+i\sin(\frac{360^\circ}{n}\times k)\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)$

注）図と併用すると解きやすい

⑭　αのｎ乗根（$z^n=\alpha$）

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおき、両辺を極形式で表して比較せよ

参考）$\alpha_k=\alpha_0 z_k\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)$　z_k は上の１のｎ乗根

α_0 は、$z^n=\alpha$ の解のひとつ

⑮　点 α,β の距離 $|\beta-\alpha|$

⑯　ｍ：ｎに分ける点：$\gamma=\frac{n\alpha+m\beta}{m+n}$

⑰　２直線のなす角

$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\angle BAC$

垂直条件：

・$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数 $AB\perp AC$

・$\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が純虚数 $AB\perp CD$

（$-z=\bar{z}$ ならば z は純虚数と連動させて解く場合が多い）

・一直線上にある条件：

$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数 $\Leftrightarrow$ 点 A,B,C は、一直線上

（$z=\bar{z}$ ならば z は実数と連動させて解く場合が多い）

平行条件

・$\frac{\delta-\gamma}{\beta-\alpha}$ が実数 $\Leftrightarrow AB\ /\!/\ CD$

⑱　回転移動

・回転の中心が原点のとき

複素数 $\cos\theta+i\sin\theta$ をかける

・回転の中心が α のとき

β を θ 回転した点が γ の式は、

$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\theta+i\sin\theta$

・点 β を回転して（回転の中心 α から）r 倍の点 γ

$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

（三角形の形状を調べることが出来る）

⑲　円の方程式　$|z-\alpha|=r$

$n|z-\alpha|=m|z-\beta|$ の表す図形の調べ方

（$m:n=1:1$　のときは直線である）

(1) $z\bar{z}=|z|^2$ の利用

(2) $z=x+yi$ とおく方法

(3)アポロニウスの円

距離が $m:n$ のときなので、２定点を結ぶ線分を

$m:n$ に内分・外分する点を直径の両端とする円

＜ベクトル＞

①　ベクトルの演算

和・差・実数倍については、文字の計算と同様

②　ベクトルの成分表示

平面ベクトル：$\vec{a}=x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}=(x_1,y_1)$

空間ベクトル：$\vec{a}=x_1\overrightarrow{e_1}+y_1\overrightarrow{e_2}+z_1\overrightarrow{e_3}=(x_1,y_1,z_1)$

成分での計算ができるようにすること

③　ベクトルの内積：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

平面ベクトル：

$\vec{a}=(x_1,y_1)$　$\vec{b}=(x_2,y_2)$ のとき、$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

空間ベクトル：

$\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$　$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$　のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

④　ベクトルの大きさ

平面上：$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

空間上：$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$ は、良く用いられる。

⑤　ｍ：ｎに分ける点：　$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

⑥　図形への応用（空間ベクトルも同様である）

図形問題を解く上では、各点の位置ベクトル

$A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$,・・・（$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,・・・）を用いるが、始点をある点にした方が良いと判断した場合は、例えば、$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$・・・等とおいて解答することも良くある。

次のものは常識である。

・中点：$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

公式集（数学Ⅱ・B）　頭に入っていますか？

・三角形の重心：$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

・平行条件：$\vec{a}=t\vec{b}$　（t：実数）

・垂直条件：$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

・一直線上にある条件：$\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{AC}$　（t：実数）

・なす角を求める：$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ から θ を決定

⑦　ベクトル方程式

直線のベクトル方程式は

(1)1 点 $\vec{a}$ と方向ベクトル $\vec{d}$：$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$　（t：実数）

(2)2 点 $\vec{a}$, $\vec{b}$ を通る：$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$　（t：実数）

(3)角の二等分線

$$\vec{p}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$$

平面のベクトル方程式（平面 ABC 上に点 P が存在）

(1) $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$　（実数 s,t の存在）

(2) $\vec{p}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$　（$r+s+t=1$）

円・球面について、ベクトル方程式：$|\vec{p}-\vec{a}|=r$

(1)平面上では、円

(2)空間上では、球面

成分表示した場合は、それぞれの方程式は

円：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

球面：$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

注）交点を求めるには上記のベクトル方程式で、各座標（成分）を媒介変数表示して求める。

直線・平面について、ベクトル方程式：$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ は、

(1)平面上では、直線

(2)空間上では、平面