公式集（数学Ｉ・A）頭の中に入っていますか？

＜２次関数のグラフ＞

$y = ax^2 + bx + c = a(x-p)^2 + q$

$\quad = a(x-\alpha)(x-\beta)$

①平方完成して、頂点(p,q)を決定する

②判別式$D = b^2 - 4ac$でx軸との関係を調べる

③最大値・最小値に関しては、定義域に注意する

④関数$y = f(x)$の平行移動：$y - q = f(x-p)$

⑤関数の決定

1. $y = ax^2 + bx + c$
2. $y = a(x-p)^2 + q$
3. $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$

＜２次方程式・不等式＞

$ax^2 + bx + c = 0$（$a \neq 0$）

（注）$a = 0$だと１次方程式になる

２次方程式の解を求めるには、因数分解を利用するか、

$(ax-b)(cx-d) = 0$から$x = \dfrac{b}{a}, x = \dfrac{d}{c}$

解の公式を用いる。$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$　また、

bが偶数のとき（$b = 2b'$）は、$x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$

２次不等式の解は、２次関数のグラフから考える。

（注）$a = 0$だと１次不等式になる

基本的には、判別式$D = b^2 - 4ac > 0$で$\boldsymbol{a} > 0$のとき

①$ax^2 + bx + c < 0$のとき$\alpha < x < \beta$

②$ax^2 + bx + c > 0$のとき$x < \alpha, \beta < x$

ただし、判別式$D = 0, D < 0$のときは注意！！

＜連立方程式・不等式＞

連立方程式は、文字の消去

（高次方程式は因数定理の利用）

連立不等式は、数直線を利用して共通部分を求める

＜三角比＞

値を決定できること、逆に角度を決定できること。

三角方程式・不等式を解けること。

相互関係

①$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

②$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

③$\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

（Rは、外接円の半径）

余弦定理（２辺x, yと挟む角θ）

$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$

三角形の面積（２辺x, yと挟む角θ）

$S = \dfrac{1}{2}xy\sin\theta$

（内接円の半径rを求めることへ応用される）

$S = \dfrac{1}{2}ar + \dfrac{1}{2}br + \dfrac{1}{2}cr$より

さらに、余裕があれば、以下のヘロンの公式も知っていると良い

面積$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（$s$は三角形の周の半分）

＜集合＞

ベン図の利用と記号と用語の使用法を確実にする

属する：$x \in A$

共通部分：$A \bigcap B$

和集合：$A \bigcup B$

補集合：$\overline{A}$

部分集合：$A \subset B$

要素の個数については、

$n(A \bigcup B) = n(A) + n(B) - n(A \bigcap B)$

$n(A \bigcup B \bigcup C) =$

$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \bigcap B) - n(B \bigcap C) - n(C \bigcap A) + n(A \bigcap B \bigcap C)$

ド・モルガンの法則について確認すること。

＜個数の処理＞

基本的には樹形図で数え上げする

その他の方法として、

順列：${}_nP_r$

組合せ：${}_nC_r$

重複順列：n^r

同じものを含む順列：$\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots}$

重複組合せ：${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

円順列：$(n-1)!$

＜確率＞

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)}$

独立試行の確率

$P(C) = P(A)P(B)$

反復試行の確率

${}_nC_r p^r q^{n-r}$

期待値

$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \cdots + x_np_n$

公式集（数学Ⅰ・A）頭の中に入っていますか？

＜因数分解・乗法公式＞

① $\boldsymbol{acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)}$

（いわゆる、たすき掛け）

② $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

③ $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

④ $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$

⑤ $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$

⑥ $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

上記の複号は同順である

余裕があれば、以下の公式も知っていると良い

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

[良くある式の変形]

① $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

② $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

③ $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

[因数分解の一般的解法]

① ある文字について整理する（次数が低いものが良い）

② 公式が使える様に変形するか、因数定理の利用（数 B）

＜整式の割り算＞

縦書きの割り算が出来ること

$f(x)$ を $g(x)$ で割って、商が $Q(x)$ で余りが $R(x)$ のときは、

$$\begin{array}{r|l} & Q(x) \\ \hline g(x) & f(x) \\ & ////// \\ \hline & R(x) \end{array}$$

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$ と書ける。

（剰余の定理：$g(x)=x-\alpha$ のとき余りは $f(\alpha)=R$）（数 B）

＜指数法則＞

① $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

② $(a^m)^n=a^{mn}$

③ $(ab)^n=a^nb^n$

＜恒等式＞

① 数値代入法

② 係数比較法

＜絶対値の処理＞

数直線上で、実数 a と原点からの距離を $|a|$

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0\text{のとき}) \\ -a & (a<0\text{のとき}) \end{cases}$$

＜平方根の計算＞

分母の有理化や四則計算は確実にできること

① $\sqrt{a^2}=|a|$ は、$(\sqrt{a})^2=a$ とは違うことに注意せよ

③ ２重根号を外すには、

$$\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$$

＜等式の証明＞

①左辺＝・・・変形・・・＝右辺

② 左辺＝・・変形・・＝δ

右辺＝・・変形・・＝δ　　　$\therefore$ 左辺＝右辺

④ 左辺―右辺＝０を示せば良い

条件付での等式の証明では、文字を消去することを考える。特に連比の形で条件が与えられえた場合は、比の値を k とおく方法がとられる。$x:y:z=a:b:c$ ならば、$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおき、$x=ak, y=bk, z=ck$ を与式に代入して処理する。

＜不等式の証明＞

① 左辺＞右辺を示すには、左辺―右辺＞０を示せば良い

つまり、

左辺―右辺＝・・変形・・＝δ＞０の形

変形には、与えられた条件に注意して因数分解や平方完成を利用して示す場合が多い $\sqrt{\ }$ や $|\quad|$ 記号が入った場合は、両辺が正であることを確認し、$(\text{左辺})^2-(\text{右辺})^2$＞０を示す。

（注）≧のように等号付きのときは、それが成立するときをいう

②左辺＞右辺を示すのに、左辺＞中辺かつ中辺＞右辺から示す

さらに、[相加・相乗平均の関係]

$a>0, b>0$ のとき

$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$　（等号は $a=b$ のとき成立）

が成立することを利用する方法がある。

さらに、余裕があれば、以下の方法も知っていると良い

絶対不等式を利用する場合がある。有名な絶対不等式には、シュワルツの不等式

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$ がある。

＜命題＞

条件文: $p\to q$ の逆･裏･対偶を作ることが出来るようにし、その真偽の判定や証明が出来ること。真偽の判定や証明は集合の包含関係を用いる場合や『元の命題の真偽と対偶の真偽が一致する』ことを用いる。必要条件・十分条件の判断。

[背理法]

結論を否定して推論を進めると、既知事項と矛盾することを示すという証明方法である。

公式集（数学Ⅰ・A）頭の中に入っていますか？

＜数列＞

等差数列：$a_n = a + (n-1)d \quad S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

等比数列：$a_n = ar^{n-1} \quad S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1)$

数列の和の記号 $\sum$ について

①$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

②$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

③$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

⑤$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

さらに余裕があれば、以下の公式も知っていると良い

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

階差数列：$a_{n+1} - a_n = b_n$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2)$$

和と一般項の関係は

$a_1 = S_1 \quad a_n = S_n - S_{n-1}$（$n \geq 2$）

漸化式の解法

等差数列 $a_{n+1} - a_n = d$ や等比数列 $a_{n+1} = ra_n$ の利用

また、階差数列 $a_{n+1} - a_n = b_n$ の利用。

有名なものには、

$a_{n+1} = pa_n + q \quad (p \neq 1) \rightarrow \alpha = p\alpha + q$

を満たす α を用いて→ $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と変形すると

数列 $\{a_n - \alpha\}$ は、初項 $a_1 - \alpha$ 公比 p の等比数列となるので、

$$a_n - \alpha = (a_1 - \alpha) \cdot p^{n-1} \rightarrow a_n = (a_1 - \alpha) \cdot p^{n-1} + \alpha$$

与えられた漸化式が２項間のときは、上記の形が多く、両辺の対数、逆数をとったり、あるもので割り算することにより $a_{n+1} = pa_n + q \quad (p \neq 1)$ の形に変形できる。

与えられた漸化式が３項間のときは、

$\boldsymbol{pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n} = 0$ の型になるもの

特性方程式：$px^2 + qx + r = 0$ の解で分類する。

２解が α, β のとき

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ と $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$

と変形できる。

＜数学的帰納法＞

自然数に関するある命題を証明する方法

（Ⅰ）ある命題で、n=1 のときに成立することを示す。

（Ⅱ）ある命題で、n=k のとき成立を仮定して、n=k+1 のときも成立することを示す。

以上、（Ⅰ）（Ⅱ）より、すべての自然数についてある命題が成立することが証明される。

＜二項定理＞

$$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n b^n$$

パスカルの三角形を利用できること

多項定理：$(a+b+c+\cdots)^n$ の展開式で、$a^p b^q c^r \cdots$ の係数は、$\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots}$ である。